

Probabilidad y Estadística



Orgullosamente
cecYTEBC

ÍNDICE:

TEMA

PÁGINA

Presentación15

Unidad 1

Introducción a la Estadística

1. Origen y concepto de Estadística17

2. Terminología Estadística18

3. Redondeo de Datos18

4. Notación Científica19

5. Cifras Significativas20

6. Funciones21

7. Coordenadas Rectangulares22

8. Gráficos23

9. Cálculo de Porcentajes24

10. Cálculo de ángulos25

11. Ecuaciones26

12. Problemas Propuestos32

Unidad 2

Distribuciones de Frecuencia

1. Distribuciones de Frecuencia39

2. Tipos de Curva de Frecuencia44

3. Gráficos de Pastel45

4. Problemas Propuestos49

Unidad 3

Medidas de Tendencia Central

1. Medidas de Tendencia Central54

2. Relación entre la Media, Mediana y Moda57

3. Cuarteles, Deciles y Percentiles58

4. Medidas de Dispersión58

a) Rango57

b) Desviación media58

c) Varianza58

d) Desviación estandar59

e) Comprobación de Charlier60

5. Miscelánea de ejercicios60

6. Ejercicios Propuestos71



Unidad 4

Introducción a la Probabilidad	
1. Álgebra de Eventos	78
2. Notación de Conjuntos	80
3. Diagramas de Venn	80
4. Leyes del Álgebra de Eventos	81
5. Tipos Fundamentales de Conjuntos	82
6. Operaciones con Conjuntos	83
7. Técnicas de Conteo	88
a) Principio Multiplicativo	88
b) Permutaciones	88
c) Combinaciones	89
d) Diagramas de Árbol	91
8. Introducción a la Probabilidad	92
9. Reglas de Probabilidad	92
10. Problemas Propuestos	93

Unidad 5

Probabilidad de Eventos Sucesivos	
1. Probabilidad Condicional	99
2. Regla de la Multiplicación	100
3. Teorema de Bayes	102
4. Funciones de Distribución de Probabilidad Discretas	105
5. Distribución Binomial	105
6. Distribución de Poisson	106
7. Aproximación de la Binomial a la Distribución Normal	107
8. Distribución Normal	108
9. Manejo de Tablas	109
10. Distribución Chi-Cuadrado	113
11. Distribución “T” Student	115
12. Intervalos de Confianza	115
13. Problemas Propuestos	116

Unidad 6

Estadística Inferencial y Aplicaciones	
1. Conceptos Fundamentales	124
2. Determinación del Tamaño de la Muestra	125
3. Ajuste de Curvas	126
4. La Recta de Mínimos Cuadrados	127
5. La Parábola de Mínimos Cuadrados	129
6. Problemas en más de dos Variables	129
7. Problemas Propuestos	131

Solución a Problemas Propuestos	133
--	-----

Dedico esta obra a mi padre,
Andrés Aguilar Sánchez
que recientemente partió
al viaje sin retorno.

PRESENTACIÓN

El presente texto es la consumación de un esfuerzo de investigación de más de un año; esto con el fin de tener un material bibliográfico de acuerdo a la nueva reforma educativa para el Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos de Baja California (Cecyte BC). Dirigido para alumnos de quinto semestre "Probabilidad y Estadística" inicia con un repaso general de las asignaturas cursadas en semestre anteriores correspondientes al área de matemáticas. Desde las definiciones de Estadística y su clasificación, así como Probabilidad; operaciones aritméticas, notación científica, sistema de coordenadas rectangulares, entre otros elementales conocimientos del aritmética y el algebra se estudian en la unidad uno del presente texto. Se incluyen las ecuaciones y las ecuaciones simultáneas de primer grado, así como la ecuación de segundo grado. Se aporta también una breve introducción a los gráficos en forma de barra y gráficos de pastel. En la unidad dos, se analizan el manejo y registro de datos, estos obtenidos en el campo, a través de la investigación documental. Esta tabla de registro de datos se representa gráficamente a través de un histograma y un polígono de frecuencias. En la unidad tres, se estudian las medidas de tendencia central: media, mediana y moda, herramientas elementales para los estudios de control de calidad aplicados tanto en la industria como el comercio y los servicios. La unidad cuatro inicia con la introducción al estudio de la Probabilidad, técnicas de conteo como notación factorial, permutaciones y combinaciones, así como la teoría de conjuntos con sus respectivas operaciones. También se estudian los principios aditivos y multiplicativos, incluyéndose los diagramas de árbol. Se estudian las reglas de Probabilidad. Probabilidad Condicional, Esperanza Matemática y Teorema de Bayes son parte de la unidad cinco, en donde se estudian también las funciones de distribución de Probabilidad tanto discretas (binomial) como continuas (normal). Finalmente en la unidad seis, se analizan los fundamentos de la Estadística Inferencial como la Teoría de Muestreo, Determinación de la Muestra, Ajuste de Curvas y Recta de Mínimos Cuadrados.

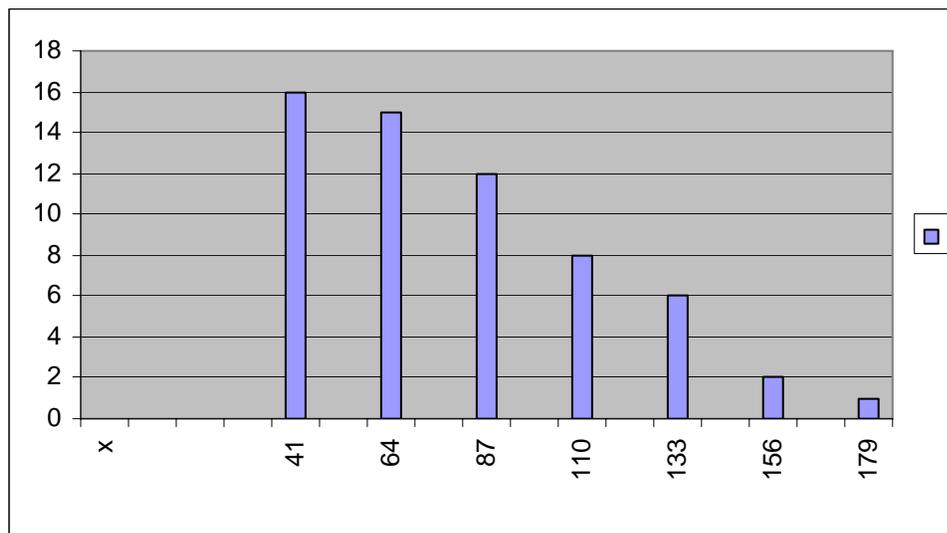
Ing. Andrés Aguilar Mezta

Agosto de 2007

UNIDAD 1

INTRODUCCIÓN A LA

ESTADÍSTICA



1. ORIGEN Y CONCEPTO DE ESTADÍSTICA

El origen de la estadística se remonta a dos tipos de actividades humanas que aparentemente tienen poco en común: La política y los juegos de azar. La estadística difícilmente se podrá entender completamente sin el estudio aplicado de la probabilidad.

El estudio de la probabilidad a mediados del siglo XVIII, motivado enormemente por el interés de los juegos de azar, condujo al tratamiento matemático de los errores de la medición y a la teoría que hoy constituye la base de la Estadística.

En ese mismo siglo, la necesidad de la descripción numérica de entidades políticas como ciudades, delegaciones, municipios, estados, países, etc., originó lo que ahora se denomina Estadística Descriptiva. Al inicio esta disciplina consistió tan solo en presentar datos en tablas y gráficas; en la actualidad incluye también la síntesis de ellos mediante descripciones numéricas.

Estadística descriptiva. Ciencia que estudia las técnicas mediante las cuales se recopilan, coleccionan, y organizan datos e información los cuales pueden representarse gráficamente.

Probabilidad. Ciencia que estudia la posibilidad de que suceda un evento de interés, llamado experimento, por ejemplo:

1. El lanzamiento de un par de dados y sus posibles resultados.
2. El lanzamiento de una moneda honrada.
3. La adquisición de un boleto para un determinado sorteo.

En los últimos años el estudio de la estadística ha revolucionado, lo cual ha dado vida a una nueva rama: la Estadística Inferencial.

Estadística Inferencial. Ciencia que auxiliándose en la recolección de datos y gráficas de la estadística descriptiva y las leyes de la probabilidad nos ayuda a tomar decisiones razonadas.

La industria, la salud, la agricultura, la ciencia política, la mercadotecnia y principalmente el control de calidad, son algunas de las muchas aplicaciones de la estadística con sus dos ramas.

Simplificando podemos obtener la siguiente definición de Estadística:

Estadística. La estadística estudia los métodos científicos para recoger, organizar, resumir y analizar datos, así como para sacar conclusiones válidas y tomar decisiones razonables basadas en tal análisis.

2. TERMINOLOGÍA ESTADÍSTICA

1. **Entidad.** En estadística se aplica la palabra entidad como termino general para referirnos a un miembro individual de un grupo de personas, lugares o cosas. Por ejemplo un educador puede mostrar interés por aquellos estudiantes que ha aprendido a leer empleando determinado método.
2. **Variable.** Una variable es un símbolo, tal como x , y , z , o A , que puede un conjunto prefijado de valores llamado dominio de esa variable. Si la variable puede tomar un solo valor, se llama constante.
3. **Variable aleatoria.** Si los valores numéricos que toma una variable provienen de factores reales y si un determinado valor no se puede predecir exactamente con anticipación, esa variable se denomina variable aleatoria.
4. **Variable discreta.** Cuando los valores que puede tomar una variable cuando están separados entre sí por una determinada cantidad, la variable se denomina variable "discreta". Esta variable tiene la presencia de "vacíos" o "interrupciones" entre los valores que pueden tomar, por ejemplo el número de consultas en un hospital durante un día, el total de entradas al Cinopolis durante la primera función, etc.
5. **Variable Continúa.** Una variable continua es aquella que teóricamente puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo de clases. En esta variable no importa que tan cerca puedan estar dos valores de una variable por ejemplo los cambios de temperatura en una ciudad, las estratosféricas tarifas eléctricas exclusivamente en Mexicali, entre otras.

3. REDONDEO DE DATOS

Las cantidades o datos pueden ser números enteros o decimales, en muchas ocasiones es necesario redondear a una misma cantidad para resolver adecuadamente los cálculos necesarios. Generalmente cuando los números son mayores que la unidad, las cantidades se redondean a decimales, pero cuando son menores que la unidad el redondeo es a cuatro decimales.

Ejemplo 1. Redondear a dos decimales 73.4897

Si la tercera cifra es mayor que cinco se aumenta una cantidad a la segunda, por lo tanto:

$$73.4897 = 73.49 \quad (8 + 1 = 9).$$

Ejemplo 2. Redondear a cuatro decimales 0.4384576

$$0.4384576 = 0.4384 \quad (4 + 0 = 4)$$

Ejemplo 3. Redondear 58.96 a decenas

$$\text{Una decena} = 10 \text{ unidades, entonces: } 58.96 = 6 \text{ decenas.}$$



Ejemplo 4. Resolver la suma mostrada y redondear a centésimos.

$$2.9421 + 0.9684 + 10.4 + 6.20324 = 20.51374 = 20.51$$

Ejemplo 5. Sumar los números 5.43, 8.56, 2.59, 12.54, 5.66, 7.88 y 9.57:

- (a) Directamente
- (b) Redondeando a décimas
- (c) Redondeando a cifras enteras

(a)	(b)	(c)
5.43	5.4	5
8.56	8.6	9
2.59	2.6	3
+ 12.54	+ 12.5	+ 13
5.66	5.7	6
7.88	7.9	8
<u>9.57</u>	<u>9.6</u>	<u>10</u>
52.23	52.3	54

4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica, conocida también como notación exponencial, se aplica cuando existen cifras decimales excesivamente grandes, o bien exageradamente pequeñas. Para la conversión de números decimales a notación exponencial aplicaremos, la expresión:

$$N \times 10^n$$

Donde:

N = valor entero o decimal del coeficiente.

n = valor del exponente entero, positivo o negativo.

La notación exponencial se aplica mediante potencias de base 10.

$$10^1 = 10 \times 1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10,000$$

$$10^0 = 1 \text{ (Por definición)}$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.10$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.001$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.00001$$



Ejemplo 6. Transformar a notación exponencial 649 000

$$649\,000,000 = 6.49 \times 10^8$$

Ejemplo 7. Convertir 0.000072 a notación científica.

$$0.000072 = 7.2 \times 10^{-5}$$

Ejemplo 8. Resolver la multiplicación y expresar el resultado en exponentes.

$$(5\,000,000)(0.00000000003) = (5 \times 10^6)(3 \times 10^{-11}) = 15 \times 10^{-5}$$

Ejemplo 9. Resolver la expresión mixta en notación exponencial.

$$\frac{(0.00034)(7\,100,000)}{0.00022} = \frac{(3.4 \times 10^{-4})(7.1 \times 10^6)}{(2.2 \times 10^{-4})} = \frac{24.14 \times 10^2}{2.2 \times 10^{-4}} = 10.97 \times 10^6$$

5. CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Si la altura de cierta persona se mide con la mayor precisión posible es de 1.80 metros (m), eso significa que está entre 1.75 m y 1.85 m. Los dígitos empleados, a parte de los ceros necesarios para localizar el punto decimal, se denominan dígitos significativos o cifras significativas, del número.

Ejemplos ilustrativos:

53.7 tiene tres cifras significativas

6.2200 tiene cinco cifras significativas

$0.0029 = 2.9 \times 10^{-3}$ tiene dos cifras significativas

$0.002900 = 2900 \times 10^{-3}$ tiene cuatro cifras significativas

Los números asociados a enumeraciones, por la contraposición a los obtenidos por mediaciones, son exactos y tienen una cantidad ilimitada de cifras significativas. No obstante, en algunos de estos casos puede resultar difícil decidir que cifras son significativas sin información adicional:

Ejemplo 10. ¿Cuántas cifras significativas hay en cada uno de los números mostrados, suponiendo que han sido redondeados correctamente?

- (a) 194.6 metros (m) cuatro
- (b) 194.60 metros (m) cinco
- (c) 0.0082 metros (m) dos

6. FUNCIONES

Si a cada valor posible de una variable x le corresponden uno o más valores de otra variable y , entonces decimos que y es función de x , y escribimos:

$$y = f(x)$$

A la variable x se le llama variable independiente y a la variable y se le llama variable dependiente.

Ejemplo 11. La población total P de Baja California está en función del tiempo t , y lo expresamos:

$$P(\text{BAJA CALIFORNIA}) = f(t)$$

Ejemplo 12. La longitud L de una varilla está en función de su peso, expresándose:

$$L = f(P)$$

Ejemplo 13. Los profesores del CECYTE (C), están en función del Director (D) de cada uno de los planteles:

$$C = f(D)$$

La dependencia funcional o correspondencia entre variables se anota en algunas ocasiones en una tabla. Sin embargo, puede también indicarse con una ecuación que conecta ambas variables, por ejemplo:

$$y = 4x + 5$$

si $x = 2$, y la función de x puede escribirse como: $y = f(x)$

entonces: $f(x) = 4x + 5$

sustituyendo el valor de x tenemos: $f(2) = 4(2) + 5$

$$f(2) = 8 + 5$$

$$f(2) = 13$$

El concepto de función admite extensión a varias variables.

Ejemplo 14. Si $z = 5x - 3y + 11$, hallar el valor de z correspondiente a:

a) $x = 1, y = 4$

sustituyendo tenemos:

$$z = 5(1) - 3(4) + 11$$

$$z = 5 - 12 + 11$$

$$z = 4$$

b) $x = -2, y = -5$

sustituyendo tenemos:

$$z = 5(-2) - 3(-5) + 11$$

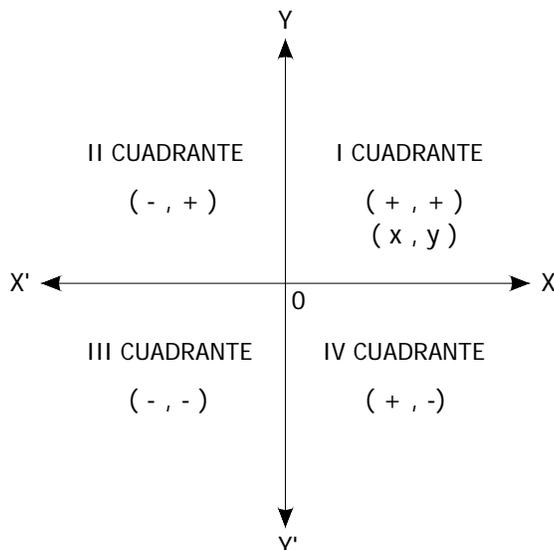
$$z = -10 + 15 + 11$$

$$z = 16$$



7. COORDENADAS RECTANGULARES

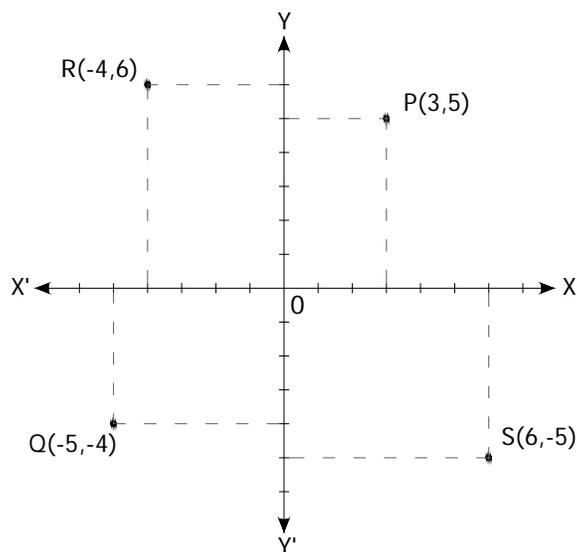
Consideremos dos rectas perpendiculares $X'OX$ e $Y'OY$, llamadas ejes X e Y , respectivamente, sobre las que se indican escalas apropiadas. Estas rectas dividen el plano que determinan, llamado XY , en cuatro regiones, a las cuales se le conocen como cuadrantes.



El punto O se llama origen. Los valores de x, y en los puntos donde tales perpendiculares cortan a los ejes se conocen como las coordenadas rectangulares o simplemente coordenadas.

Ejemplo 15. Representar gráficamente los siguientes puntos en el sistema de coordenadas rectangulares.

- P(3, 5)
- Q(-5,-4)
- R(-4,-6)
- S(6,-5)



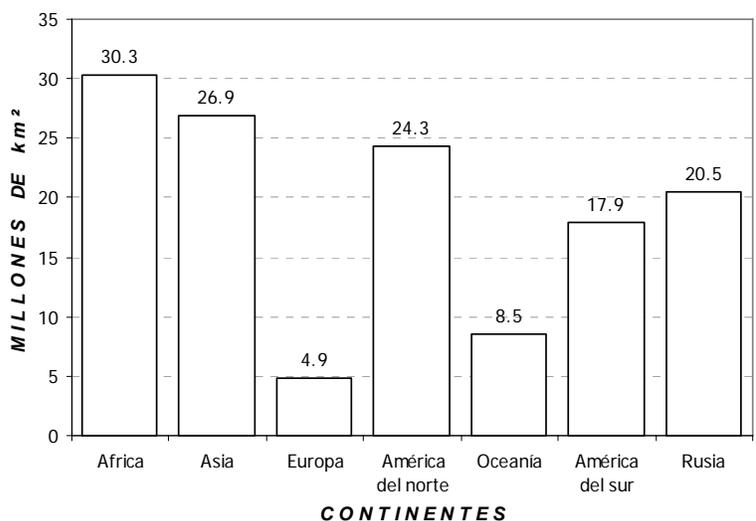


8. GRÁFICOS

Un gráfico es una representación de la relación entre variables. Muchos tipos de gráficos aparecen en Estadística; según la naturaleza de los datos involucrados y el propósito del gráfico. Entre ellos citemos por ejemplo los gráficos de barras, los gráficos de pastel, conocidos como “pie charts” y los gráficos a base de pictogramas.

Ejemplo 16. Los siguientes datos representan las áreas de los continentes en millones de kilómetros cuadrados. Construir un diagrama de barras.

CONTINENTE	AREA (millones km ²)
África	30.3
Asia	26.9
Europa	4.9
América del norte	24.3
Oceanía	8.5
América del sur	17.9
Rusia	20.5
TOTAL	133.3



Ejercicio 17. Con los datos e información del problema anterior; construir un gráfico de pastel o pie chart.

CONTINENTE	AREA (millones km ²)	PORCENTAJE (%)	ANGULOS (°)
África	30.3	22.73%	82°
Asia	26.9	20.18%	73°
Europa	4.9	3.68%	13°
América del Norte	24.3	18.23%	66°
Oceania	8.5	6.38%	23°
América del Sur	17.9	13.43%	48°
Rusia	20.5	15.38%	55°
TOTAL	133.3	100.00%	360°

9. CÁLCULO DE PORCENTAJES

$$\text{AFRICA: } \frac{30.3}{133.3} \times 100 = 22.73\%$$

$$\text{ASIA: } \frac{26.9}{133.3} \times 100 = 20.18\%$$

$$\text{EUROPA: } \frac{4.9}{133.3} \times 100 = 3.68\%$$

$$\text{AMERICA DEL NORTE: } \frac{24.3}{133.3} \times 100 = 18.23\%$$

$$\text{OCEANIA: } \frac{8.5}{133.3} \times 100 = 6.37\%$$

$$\text{AMERICA DEL SUR: } \frac{17.9}{133.3} \times 100 = 13.43\%$$

$$\text{RUSIA: } \frac{20.5}{133.3} \times 100 = 15.38\%$$



10. CÁLCULO DE ÁNGULOS

Para calcular los ángulos que representaran los porcentajes de la información en el gráfico de pastel, se realiza una regla de tres para relacionar los porcentajes con los ángulos que en su totalidad forman el diagrama circular. Se recomienda "redondear" solo a números enteros.

AFRICA: $100\% - 360^\circ$
 $22.73\% - x$

$$x = \frac{(22.73\%)(360^\circ)}{100\%}$$

$$x = 81.83^\circ \approx 82^\circ$$

ASIA: $100\% - 360^\circ$
 $20.18\% - x$

$$x = \frac{(20.18\%)(360^\circ)}{100\%}$$

$$x = 72.65^\circ \approx 73^\circ$$

EUROPA: $100\% - 360^\circ$
 $3.68\% - x$

$$x = \frac{(3.68\%)(360^\circ)}{100\%}$$

$$x = 13.25^\circ \approx 13^\circ$$

AMERICA DEL NORTE: $100\% - 360^\circ$
 $18.23\% - x$

$$x = \frac{(18.23\%)(360^\circ)}{100\%}$$

$$x = 65.63^\circ \approx 66^\circ$$

OCEANIA: $100\% - 360^\circ$
 $6.37\% - x$

$$x = \frac{(6.37\%)(360^\circ)}{100\%}$$

$$x = 22.93^\circ \approx 23^\circ$$

AMERICA DEL SUR: $100\% - 360^\circ$
 $13.43\% - x$

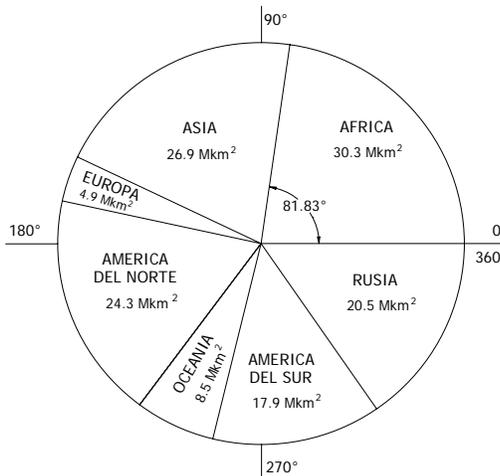
$$x = \frac{(13.43\%)(360^\circ)}{100\%}$$

$$x = 48.35^\circ \approx 48^\circ$$

RUSIA: $100\% - 360^\circ$
 $15.38\% - x$

$$x = \frac{(15.38\%)(360^\circ)}{100\%}$$

$$x = 55.37^\circ \approx 55^\circ$$



Este problema se puede resolver con ayuda del asistente de gráficos de Microsoft® EXCEL.

11. ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones que se denominan miembros de la misma. Las soluciones de una ecuación son los valores que satisfacen la misma.

Ejemplo 18. Resolver la ecuación $x + 2 = 5$

Despejando x: $x = 5 - 2$

$$x = 3$$

Comprobación: $(3) + 2 = 5$

Por lo tanto: $5 = 5$

Ejemplo 19. Resolver la ecuación: $6x + 8 = 48 - 4x$

Sumando y trasponiendo términos semejantes: $6x + 4x = 48 - 8$

$$10x = 40$$

$$x = \frac{40}{10}$$

$$x = 4$$

Ejemplo 20. Evaluar las siguientes expresiones algebraicas, dado que:

$$x = 4$$

$$y = -3$$

$$a = 3$$

$$b = -5$$

(a) $3x - 7y$

(d) $x^2 + 4xy - 9y^2$

(b) $5x - 9y + 17$

(e) $4(2x + 6y) - 8(6x - 4y)$

(c) $\frac{2ax + by}{bx - 5ay}$

(a) $3x - 7y = 3(4) - 7(-3) = 12 + 21 = 33$

(b) $5x - 9y + 17 = 5(4) - 9(-3) + 17 = 20 + 27 + 17 = 64$

(c) $\frac{2ax + by}{bx - 5ay} = \frac{2(3)(4) + (-5)(-3)}{(-5)(4) - 5(4)(-3)} = \frac{24 + 15}{-20 + 60} = \frac{39}{40}$

(d) $x^2 + 4xy - 9y^2 = (4)^2 + 4(4)(-3) - 9(-3)^2 = 16 - 48 - 81 = -113$

(e) $4(2x + 6y) - 8(6x - 4y)$ simplificando la expresión tenemos:

$$8x + 24y - 48x + 32y = -40x + 56y = -40(4) + 56(-3) = -160 - 168 = -328$$

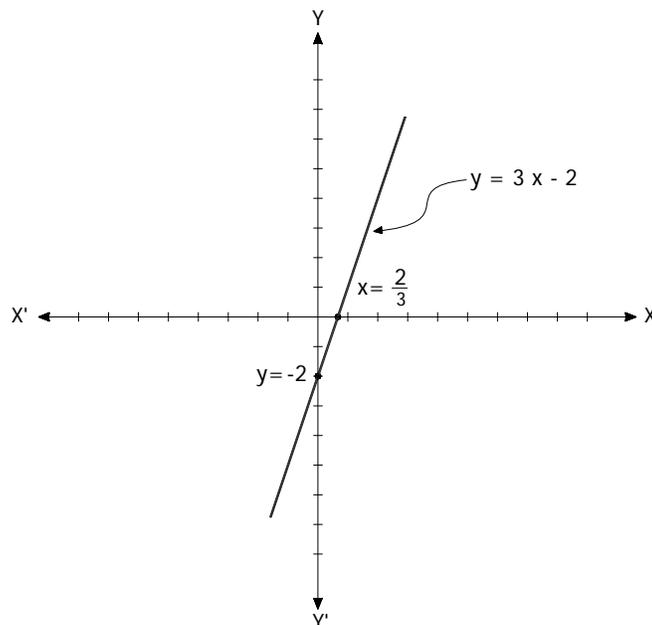


Ejemplo 21. Representar gráficamente la función: $y = 3x - 2$

Primer Método. Asignamos valores de cero (0) a las variables x e y . Sustituyéndolas en la función se tiene:

$$\begin{array}{ll} x = 0 & y = 0 \\ y = 3(0) - 2 & 0 = 3x - 2 \\ y = -2 & 3x = 2 \\ & x = \frac{2}{3} \end{array}$$

Los puntos obtenidos se grafican en sus respectivos ejes en un sistema de coordenadas rectangulares.

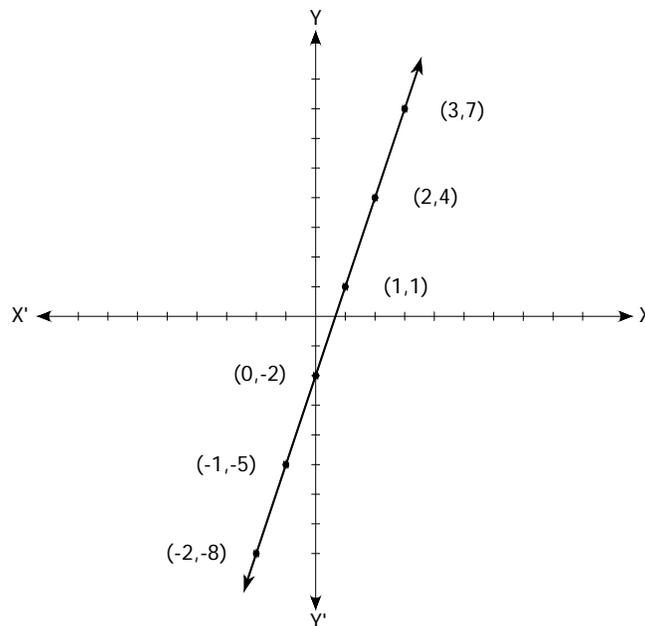


Segundo Método. Se elabora una tabla, proponiendo valores a la variable independiente (x), para encontrar los valores de la variable dependiente (y).

Tabulación:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-8	-5	-2	1	4	7

$$\begin{array}{llllll} x = -2 & x = -1 & x = 0 & x = 1 & x = 2 & x = 3 \\ y = 3(-2) - 2 & y = 3(-1) - 2 & y = 3(0) - 2 & y = 3(1) - 2 & y = 3(2) - 2 & y = 3(3) - 2 \\ y = -8 & y = -5 & y = -2 & y = 1 & y = 4 & y = 7 \end{array}$$



Ejemplo 22. Resolver el sistema de ecuaciones mostrado por cualquier método analítico y comprobarlo gráficamente.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 & (1) \\ 4x - 5y = -8 & (2) \end{cases}$$

Aplicando el Método de Reducción, multiplicamos por 5 la ecuación (1) y por 2 la ecuación (2):

$$\begin{array}{lll} (5) (3x + 2y = 17) & 15x + 10y = 85 & (1) \\ (2) (4x - 5y = -8) & 8x - 10y = -16 & (2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15x + 10y = 85 \\ 8x - 10y = -16 \\ \hline 23x = 69 \end{array}$$

$$x = \frac{69}{23}$$

$$x = 3$$

Despejando y de la ecuación (1):

$$3x + 2y = 17$$

$$y = \frac{17 - 3(3)}{2}$$

$$y = \frac{17 - 9}{2}$$

$$y = 4$$



Resolviendo el problema por el método gráfico, primeramente le proponemos valores de cero a ambas variables, sustituyendo en las dos ecuaciones:

$$3x + 2y = 17 \quad (1)$$

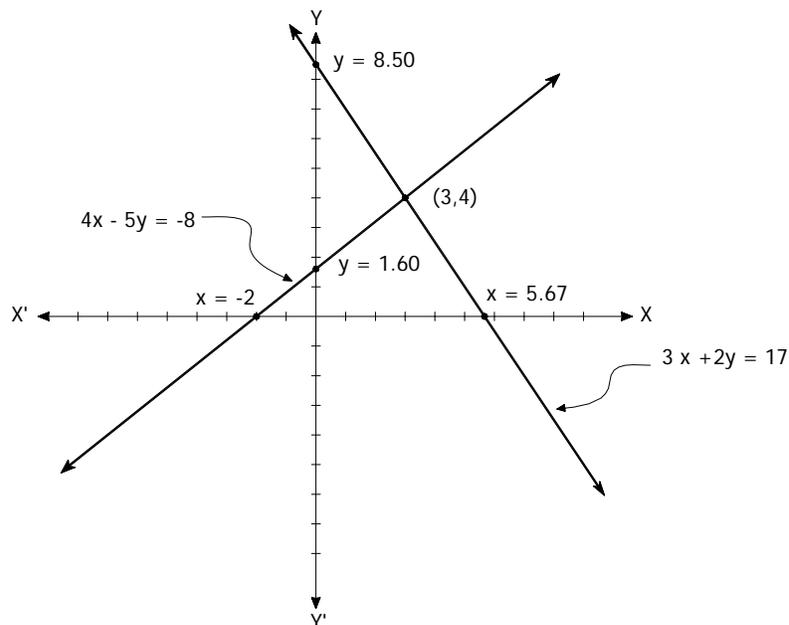
$$4x - 5y = -8 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ 3(0) + 2y &= 17 \\ y &= \frac{17}{2} \\ y &= 8.50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 3x + 2(0) &= 17 \\ x &= \frac{17}{3} \\ x &= 5.67 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ 4(0) - 5y &= -8 \\ y &= \frac{-8}{-5} \\ y &= 1.60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 4x - 5(0) &= -8 \\ x &= \frac{-8}{4} \\ x &= -2 \end{aligned}$$



Ejemplo 23. Resolver el sistema de ecuaciones mostrado de tres incógnitas.

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 4 & (1) \\ 4x - 3y + 2z = 9 & (2) \\ 5x + 6y - 2z = 18 & (3) \end{cases}$$

Primeramente se elige una de las tres variables a eliminar, de preferencia la menor o coeficientes múltiples, sea z . Para eliminar la variable z de las ecuaciones (1) y (2), se multiplica por 2 la (1) y por 3, la (2):

$$\begin{aligned} (2) \quad 2x + 5y - 3z &= 4 \\ (3) \quad 4x - 3y + 2z &= 9 \\ \hline 4x + 10y - 6z &= 8 \\ 12x - 9y + 6z &= 27 \\ \hline 16x + y &= 35 \quad (4) \end{aligned}$$



Se elimina la variable z , pero ahora de las ecuaciones (1) y (3), multiplicando por 2 la (1) y por -3, la (3):

$$\begin{aligned} (2) \quad & 2x + 5y - 3z = 4 \\ (-3) \quad & 5x + 6y - 2z = 18 \\ & 4x + 10y - 6z = 8 \\ & -15x - 18y + 6z = -54 \\ \hline & -11x - 8y = -46 \quad (5) \end{aligned}$$

Formando un sistema de ecuaciones con (4) y (5):

$$\begin{aligned} 16x + y &= 35 \quad (4) \\ -11x - 8y &= -46 \quad (5) \end{aligned}$$

Se eliminará y , multiplicando por 8 la ecuación (4) y multiplicando por 1 la (5)

$$\begin{aligned} (8) \quad & 16x + y = 35 \\ (1) \quad & -11x - 8y = -46 \\ \hline & 128x + 8y = 280 \\ & -11x - 8y = -46 \\ \hline & 117x = 234 \\ & x = \frac{234}{117} \\ & x = 2 \end{aligned}$$

Despejando y de (4):

$$\begin{aligned} 16x + y &= 35 \\ y &= 35 - 16x \\ y &= 35 - 16(2) \\ y &= 35 - 32 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Despejando z de (1):

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 3z &= 4 \\ z &= \frac{4 - 2x - 5y}{-3} \\ z &= \frac{4 - 2(2) - 5(3)}{-3} \\ z &= \frac{4 - 4 - 15}{-3} \\ z &= \frac{-15}{-3} \\ z &= 5 \end{aligned}$$

Comprobación: Sustituyendo los valores hallados de x, y, z en (2)

$$\begin{aligned} 4(2) - 3(3) + 2(5) &= 9 \\ 8 - 9 + 10 &= 9 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$



Ejemplo 24. Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas anterior gráficamente.

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 4 & (1) \\ 4x - 3y + 2z = 9 & (2) \\ 5x + 6y - 2z = 18 & (3) \end{cases}$$

Primeramente asignados cero (0) a dos variables de las tres ecuaciones:

$2x + 5y - 3z = 4$ (1)	$y = 0$	$z = 0$	$x = 2.00$
	$x = 0$	$z = 0$	$y = 0.80$
	$x = 0$	$y = 0$	$z = -1.33$
$4x - 3y + 2z = 9$ (2)	$y = 0$	$z = 0$	$x = 2.25$
	$x = 0$	$z = 0$	$y = -3.00$
	$x = 0$	$y = 0$	$z = 4.50$
$5x + 6y - 2z = 18$ (3)	$y = 0$	$z = 0$	$x = 3.60$
	$x = 0$	$z = 0$	$y = 3.00$
	$x = 0$	$y = 0$	$z = -9.00$

Ejemplo 25. Deducir la formula de la ecuación de segundo grado, si es del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, si $a \neq 0$

Despejando a y traspasando c , obtenemos:

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

Completamos el trinomio cuadrado perfecto.

La mitad de $\frac{b}{a}$ es $\frac{b}{2a}$, luego entonces:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

Desarrollando operaciones:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

factorizando y simplificando:

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

extrayendo raíz cuadrada:

$$x + \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

despejando x :



$$x = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

finalmente:

Ejemplo 26. Resolver por fórmula general la ecuación:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

Identificando los valores constantes, tenemos:

$$a = 2 \qquad b = 3 \qquad c = -2$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$$

12. PROBLEMAS PROPUESTOS

- Expresar si los enunciados siguientes representan datos discretos, o bien datos continuos.
 - Milímetros de lluvia en la ciudad de Tijuana durante los meses del año de 2005.
 - La velocidad de un automóvil en km/h .
 - Numero de billetes de \$100.00 pesos en circulación en México en cada momento.
 - Volumen de acciones e indicadores diario en la bolsa Mexicana de Valores.
 - El movimiento de la arena por la formación de olas en todos los mares y océanos del mundo.
 - Los nacimientos en el estado de Baja California.
 - El numero de estudiantes matriculados en la UABC (Universidad Autónoma de Baja California) en varios años.
 - Las filtraciones de agua por el canal "Todo Americano" hacia el Valle de Mexicali, mientras no se ejecute la obra de rehabilitación y en cementado.
- Redondear cada número con la precisión indicada.
 - 3824 centenas
 - 6.821 decenas
 - 0.0068 milésimas
 - 0.0000089203 millonésimas
 - 2164.96 decenas

3. Expresar cada número en notación decimal.

- | | |
|------------------------------|---|
| (a) 143.5×10^3 | (f) masa del protón 1.67×10^{-27} |
| (b) 451.22×10^{-4} | (g) masa del electrón 9.1×10^{-31} Kg |
| (c) 2700×10^{-6} | (h) constante gravitacional 6.67×10^{-11} m ³ / Kg·seg ² |
| (d) 6.841×10^{-5} | (i) distancia de un año luz 9.4610×10^{12} Km |
| (e) 0.00002960×10^7 | (j) masa del sol 2×10^{30} Kg |

4. Escribir los siguientes números en notación científica

- (a) 0.000843
- (b) 635,000,000
- (c) 37,500,000,000
- (d) 0.000 000 001 945
- (e) 19 cienmilésimas

5. Escribir los siguientes números en notación científica.

- (a) 0.000718
- (b) 676,000,000,000
- (c) La velocidad de la luz es de $300,000 \text{ km/s}$
- (d) Para que un móvil entre en órbita en la Tierra se necesita una velocidad de $11,000 \text{ m/s}$

6. calcular en segundos, minutos, horas, días, semanas y en meses, la fundación del Cecyte, ya que de acuerdo al Periódico Oficial del Estado de Baja California, se funda el día 15 de julio de 1998 por el entonces gobernador Lic. Héctor Terán Terán (†). Obtener los resultados en:

- (a) Notación decimal
- (b) Notación científica

7. Una computadora tiene una capacidad de 3.5 gigas de memoria en disco duro, calcular a cuantos diskettes equivale la memoria de almacenamiento de la computadora, si la memoria de cada diskette es de 1.44 megas de memoria.

8. Si $z = 9x^2 - 18xy + 4y^2$, calcular z cuando:

- (a) $x = 1, y = 2$
- (b) $x = 3, y = -1$



9. Localizar en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos de coordenadas:

- (a) A(2,7)
- (b) B(-2,4)
- (c) C(-4,4)
- (d) D(-5,-3)
- (e) E(6,-8)

10. Representar gráficamente las siguientes ecuaciones lineales:

- (a) $5x - 3y = 15$
- (b) $3x - 2y = 12$

11. Representar gráficamente las ecuaciones de segundo grado:

- (a) $y = x^2 - 8x + 3$
- (b) $y = 2x^2 - 4x + 11$

12. Representar gráficamente los sistemas de ecuaciones simultaneas:

$$(a) \begin{cases} -8x + y = -2 & (1) \\ 4x - 3y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 4x + 13y = -5 & (1) \\ 2x - 54y = -1 & (2) \end{cases}$$

13. Representar gráficamente la ecuación de tercer grado:

$$y = x^3 - 4x^2 + 12x - 6$$

14. De acuerdo al American Bureau of Census, la siguiente tabla muestra la población del condado de Los Ángeles durante los años 1930 al 1990. Construir un Histograma y un polígono de frecuencias:

LOS ANGELES, CALIFORNIA	
AÑO	POBLACION (habitantes)
1930	1'238,048
1940	1'504,277
1950	1'970,358
1960	2'479,015
1970	2'816,061
1980	2'966,850
1990	3'485,398



15. La siguiente tabla muestra un promedio del rendimiento de diesel en 50 viajes de la ruta 4 de Transportes Modernos de Mexicali. Construir un Histograma y un polígono de frecuencia.

KILOMETROS POR LITRO	NUMERO DE VIAJES
4.50	3
5.50	8
6.50	9
7.50	11
8.50	8
9.50	7
10.50	4

Total 50 viajes

16. En las elecciones de 1995 para diputados locales, se obtuvieron los siguientes resultados en el distrito VII, correspondiente al Municipio de Tecate. Elaborar un gráfico de pastel.

PARTIDO	PORCENTAJE (%)
PAN	33.59%
PRI	53.31%
PRD	7.15%
PFCRN	0.62%
PT	1.01%
PVEM	0.00%
PRS	0.01%
PPBC	1.26%
OTROS	0.00%
NULOS	2.85%

PAN = Partido Acción Nacional
 PRI = Partido Revolucionario Institucional
 PRD = Partido de la Revolución Democrática
 PFCRN = Partido del Frente Cardenista
 PT = Partido del trabajo
 PVEM = Partido Verde Ecologista de México
 PRS = Partido de la Revolución Socialista
 PPBC = Partido Progresista de Baja California

17. La elecciones federales de 1988, en Baja California, arrojaron las siguientes cifras:

CANDIDATO	PARTIDO	VOTOS	PORCENTAJE VOTOS
Carlos Salinas de Gortari	PRI	151,739	36.66%
Manuel Clouthier del Rincón	PAN	100,951	24.38%
Cuauhtemoc Cárdenas Solórzano	FDN*	153,949	37.18%
Otros		7,314	1.78%

Votos Totales = 413,953 Padrón Electoral= 817,466
 *FDN =Frente Democrático Nacional

Elaborar un gráfico de pastel, para representar la información de la tabla mostrada.

18. En el Plantel Cecyte Xochimilco, la distribución de grupos y su correspondiente cantidad de alumnos, era la siguiente en los turnos matutino y vespertino, en el ciclo escolar agosto 2005 a enero 2006.

TURNO MATUTINO		TURNO VESPERTINO	
GRUPO	ALUMNOS	GRUPO	ALUMNOS
1 AP	44	1 CP	42
1 BP	44	1 DP	43
1 AM	44	1 EP	42
1 BM	44	1 FP	44
1 AT	44	1 CM	41
3 AP	38	1 DM	37
3 BP	40	1 BT	40
3 CP	38	1 SFT	52
3 AM	39	3 DP	40
3 BM	38	3 EP	40
5 AP	36	3 CM	35
5 BP	31	3 SFT	18
5 CP	32	5 DP	26
5 AM	52	5 CM	47

Representar gráficamente, tanto en Histograma y polígono de frecuencias como en gráficos de pastel.

19. La tabla mostrada, representa las temperaturas de ciudades fronterizas entre México y Estados Unidos; se dan a conocer las máximas y las mínimas en centígrados ($^{\circ}\text{C}$). La información corresponde al día domingo 21 de abril de 2006.

CIUDAD	MAXIMA ($^{\circ}\text{C}$)	MINIMA ($^{\circ}\text{C}$)
Tijuana	20	10
Los Ángeles	19	12
San Diego	19	13
Ensenada	19	9
Mexicali	26	10
Las Vegas	23	12
Yuma	27	13
Hermosillo	34	15
Culiacán	33	15
Mazatlán	32	14
Ciudad Obregón	35	16
Phoenix	29	15

Construir un Histograma y un polígono de frecuencias, tanto para las temperaturas máximas como para las mínimas.

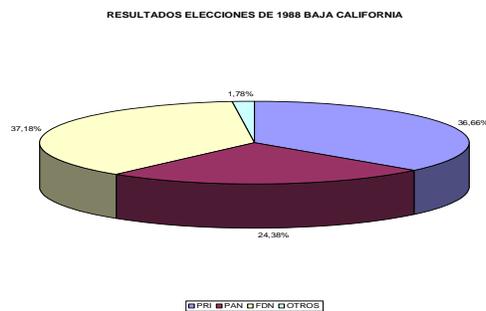


20. Las cifras siguientes representan los ganadores absolutos y sus marcas de las ediciones de la "Carrera Atlética Tecate", la cual tuvo su primer evento el día 17 de abril de 1988, siendo ganada por José Luis "la gacela" Hinojosa (†). En su honor la carrera se llama "José Luis Hinojosa" y el recorrido consta de 10 km.

CARRERA	GANADOR	FECHA		TIEMPO	ORIGEN
I	José Luis "la gacela" Hinojosa	Abril	1988	31.71'	Mexicali, B.C.
II	Jorge Márquez	Abril	1989	27.70'	Los Ángeles, CA
III	Jorge Márquez	Abril	1990	33.43'	Los Ángeles, CA
IV	Néstor García	Febrero	1991	31.72'	Mexicali, B.C.
V	Néstor García	Abril	1991	32.45'	Mexicali, B.C.
VI	Manuel Contreras	Febrero	1992	28.43'	Zacapu, Michoacán
VII	Marcos Villa Susano	Marzo	1993	30.03'	Toluca, Edo. De México
VIII	Antonio Contreras	Abril	1994	29.78'	Zacapu, Michoacán
IX	Javier "la bala" Zavala	Mayo	1995	29.35'	Tijuana, B.C.
X	Jesús Gutiérrez	Abril	1996	30.35'	Los Ángeles, CA
XI	Daniel Martínez Serna	Abril	1997	30.10'	Los Ángeles, CA
XII	Juan Salvador González	Abril	1998	30.73'	San Fabel del Monte, Mex
XIII	Daniel Martínez Serna	Abril	1999	29.70'	Los Ángeles, CA
XIV	Daniel Martínez Serna	Abril	2000	30.53'	Los Ángeles, CA
XV	Timothy Momanyl	Abril	2001	30.36'	Kena
XVI	Wilson Musto	Abril	2002	29.08'	Kenia
XVII	Reymund Torres	Abril	2003	29.91'	Tijuana, B.C.
XVIII	Kibeet Sherop	Abril	2004	30.33'	Kenia
XIX	Monder Rinkg	Abril	2005	29.35'	Bélgica

UNIDAD 2

DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA



1. DISTRIBUICIONES DE FRECUENCIAS

Tomas o Filas de Datos. Una toma o fila de datos consiste en datos obtenidos que no han sido organizados numéricamente, por ejemplo los pesos de los estudiantes de quinto semestre de la especialidad electrónica del plantel computas.

Ordenación. Una ordenación es un conjunto de datos numéricos en orden creciente o decreciente. La diferencia entre el mayor y el menor se llama rango de ese conjunto de datos.

Distribución de Frecuencias. Una distribución de frecuencias es una tabla en la cual se agrupa en clases los valores posibles para una variable y se registra el número de valores observados que corresponde a cada clase.

Los datos organizados en una distribución de frecuencias se denominan datos agrupados; por el contrario, para los datos no agrupados, se enumeran todos los valores observados de la variable aleatoria.

Número de clase. El número de clase, es la división en la cual podemos ordenar la toma de datos obtenidos en campo. Una fórmula de aproximación para calcular el número de clases es la llamada Regla de Sturges, la cual matemáticamente se define como:

$$n_o = 1 + 3.32 \log n$$

donde:

n_o = total de número de clases

n = total de datos obtenidos en campo.

\log = logaritmo de Briggs.

Amplitud de clase. Es el valor que se le aumenta a la cantidad menor de los datos o valores obtenidos, para así elaborar las distribuciones de frecuencia, matemáticamente se expresa:

$$A = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{n_o}$$

donde:

V_{\max} = valor máximo de los datos obtenidos en campo.

V_{\min} = valor mínimo.

n_o = número de clases.

El resultado final de la amplitud de clase debe estrictamente obtenerse en número entero; en caso contrario deberá redondearse, si el decimal es mayor a 0.5 se aumentará una unidad al resultado obtenido.

Intervalos de clase. Indica el rango de los valores incluidos dentro de una clase y puede ser determinado restando el límite exacto inferior de clase de su límite exacto superior.

Marca de clase. La marca es un punto medio del intervalo de clase y se obtiene promediando los límites inferior y superior de clase. La marca de clase se denomina también punto medio de la base. Generalmente se representa por x .

Frecuencia. Se define como el número de veces en que se repite un suceso y se representa por la letra f .

Histograma. Un Histograma o Histograma de frecuencias, consiste en un conjunto de rectángulos, que pueden ser:

- (a) Con bases en el eje x horizontal, centros en las marcas de clase y longitudes iguales a los tamaños de los intervalos de clase.
- (b) Áreas proporcionales a las frecuencias de clase.

Polígono de Frecuencias. Es un gráfico de trozos de la frecuencia de clase con relación a la marca de clase. Puede obtenerse conectando los puntos medios de las partes superiores de los rectángulos del Histograma.

Distribuciones de Frecuencias Relativas. La frecuencia relativa de una clase es su frecuencia dividida por la frecuencia total de todas las clases y se expresa generalmente como un porcentaje, por lo tanto la suma de las frecuencias relativas de todas las clases es 100. Si se acumulan las frecuencias relativas de varias clases, a la tabla obtenida, se le llama "tabla de frecuencia relativas".

Distribuciones de Frecuencias Acumuladas. La frecuencia total de todos los valores menores que la frontera de clase superior de un intervalo de clase dado se llama frecuencia acumulada hasta ese intervalo de clase. Una tabla que presenta varias frecuencias acumuladas se llama "tabla de frecuencias acumuladas". A las distribuciones de frecuencias acumuladas también se les conoce como "ojivas".

Curvas de Frecuencia. Los datos obtenidos pueden considerarse usualmente como pertenecientes a una muestra de una población grande. Ya que son posibles muchas observaciones sobre esa población, siendo posible escoger intervalos de clase muy pequeñas y tener todavía números razonables en cada clase.

Ejemplo 1. Los datos siguientes representan el tiempo que tarda un autobús de la ruta 4 de la línea "Transportes Modernos de Mexicali". El tiempo se mide en minutos y en promedio se realiza 60 recorridos por día. Elaborar una tabla de registro de datos, además, de construir el Histograma y polígonos de frecuencias respectivos. El tiempo corresponde a un recorrido de dicha ruta.



75	71	68	67	72	70	69	78	64	71
74	72	66	69	73	76	68	70	70	73
62	67	65	72	74	75	65	77	66	71
67	82	79	78	78	64	64	63	68	69
64	80	80	81	82	66	65	69	67	62
71	70	77	74	71	74	75	75	76	77

Solución. Primeramente se localizan los números mayor y menor.

Valor máximo=82

Valor mínimo=62

Calculando el número de clases: $n_o = 1 + 3.32 \log n$

$n =$ numero de datos $n = 60$

Sustituyendo:

$n_o = 1 + 3.32 \log 60$

$n_o = 1 + 5.9035$

$n_o = 6.9035$

La Amplitud de clase: $A = \frac{V \max - V \min}{n_o}$

$A = \frac{82 - 62}{6.9035}$

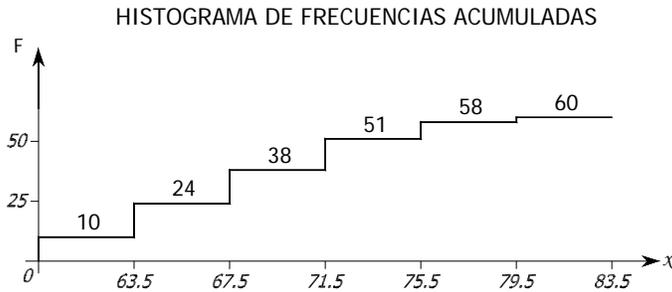
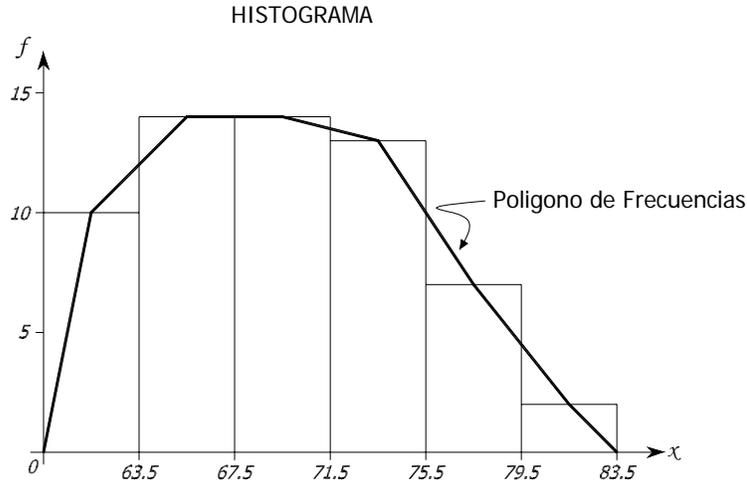
$A = 2.90$

Hay que recordar que por definición el valor de la amplitud de clase debe representarse en números enteros, por lo tanto:

$A = 3.0$

Tabla de Registro de Datos: Distribución de Frecuencias Relativas y Acumuladas

Intervalos de clase	Marca de clase x	Conteo	Frecuencia Relativa f	Frecuencia Acumulada F
62 – 65	63.50		10	10
66 – 69	67.50		14	24
70 – 73	71.50		14	38
74 – 77	75.50		13	51
78 – 81	79.50		7	58
82 - 85	83.50		2	60



Ejemplo 2. Los siguientes de los datos representan de acuerdo al U. S Bureau of the Census, los porcentajes de ciudadanos que terminaron su escuela superior (high school) en 50 estados de la Unión Americana de acuerdo al censo de 1990.

CIUDADES	%	CIUDADES	%	CIUDADES	%
Alaska	AK 83	Kentucky	KY 53	North Dakota	ND 66
Alabama	AL 57	Lousiana	LA 58	Ohio	OH 67
Arizona	AZ 72	Maine	ME 69	Oklahoma	OK 66
Arkansas	AR 56	Maryland	MD 81	Oregon	OR 76
California	CA 74	Minnesota	MN 72	Pennsylvania	PA 65
Colorado	CO 79	Michigan	ME 68	Rhode Island	RI 61
Connecticut	CT 70	Massachusetts	MA 73	South Carolina	SC 54
Delaware	DE 69	Mississippi	MS 55	South Dakota	SD 68
District of Columbia	DC 87	Misouri	MO 64	Tennessee	TN 56
Florida	FL 67	Montana	MT 74	Texas	TX 63
Georgia	GA 56	Nebraska	NE 73	Utah	UT 80
Hawaii	HI 74	Nevada	NV 76	Virginia	VA 62
Idaho	ID 74	New Hampshire	NH 72	West Virginia	WV 56
Illinois	IL 67	New Jersey	NJ 67	Wisconsin	WI 70
Indiana	IN 66	New Mexico	NM 69	Wyoming	WY 78
Iowa	IA 72	New York	NY 66	Vermont	VT 59
Kansas	KS 73	North Carolina	NC 55		



- (a) Construir una tabla de frecuencias relativas y acumuladas.
- (b) Construir un Histograma y polígono de frecuencias.

Solución:

Valor máximo=82

Valor mínimo=62

Número de clases: $n_o = 1 + 3.32 \log n$ donde $n = 50$

$$n_o = 1 + 3.32 \log 50$$

$$n_o = 1 + 5.64$$

$$n_o = 6.64$$

La Amplitud de clase: $A = \frac{V \text{ max} - V \text{ min}}{n_o}$

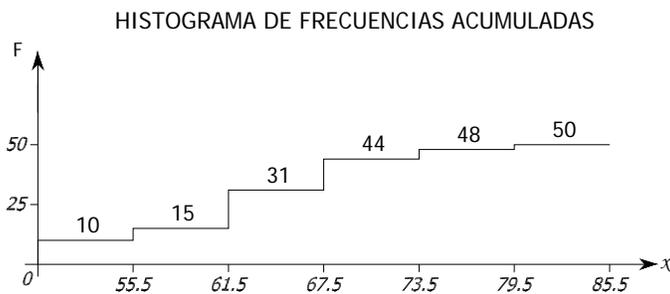
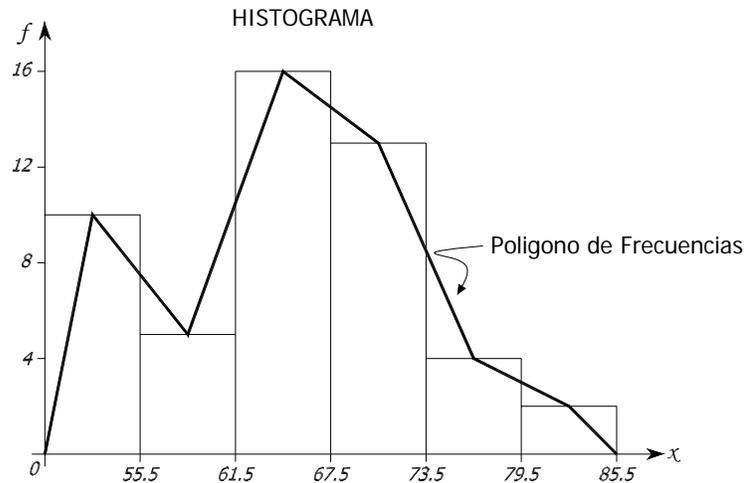
$$A = \frac{87 - 53}{6.64}$$

$$A = 5.12$$

$$A = 5.0$$

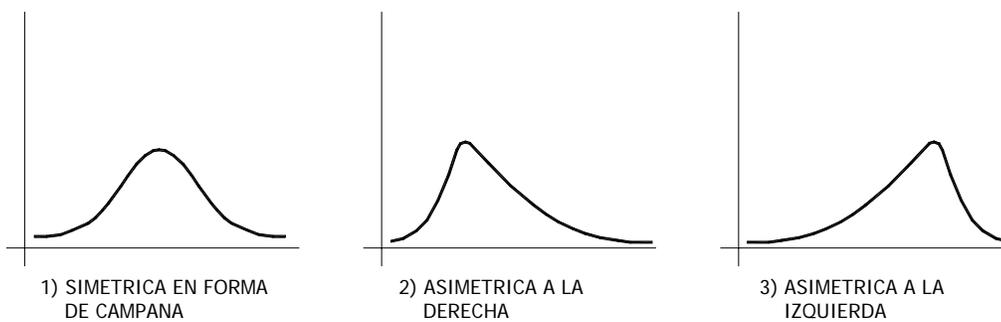
Tabla de Registro de Datos: Distribución de Frecuencias Relativas y Acumuladas

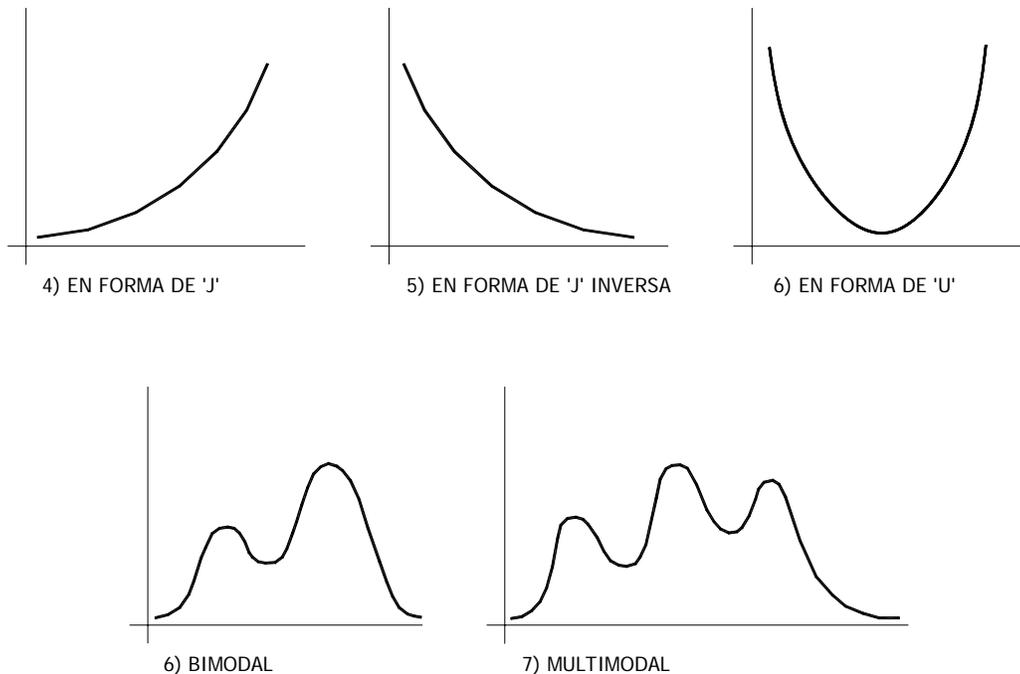
Intervalos de clase	Marca de clase x	Conteo	Frecuencia Relativa f	Frecuencia Acumulada F
53 - 58	55.50		10	10
59 - 64	61.50		5	15
65 - 70	67.50		16	31
71 - 76	73.50		13	44
77 - 82	79.50		4	48
83 - 88	85.50		2	50



2. TIPOS DE CURVAS DE FRECUENCIA

Las curvas de frecuencia que aparecen, en la practica adoptan ciertas formas características, como se ilustra en las siguientes figuras.





- a) Las curvas de frecuencias simétricas o en forma de campana (1), se caracterizan porque las observaciones equidistantes del máximo central tienen la misma frecuencia. Un ejemplo importante es la curva normal.
- b) En las curvas de frecuencias poco asimétricas o sesgadas (2 y 3), la cola de la curva a un lado del máximo central es mas larga que al otro lado. El sesgo de la cola puede ser a la derecha o hacia la izquierda.
- c) En una curva en forma de 'J' o de 'J invertida' (4 y 5), hay un máximo en un extremo.
- d) Una curva de frecuencia en forma de 'U' tiene máximos en ambos extremos.
- e) Una curva de frecuencia bimodal (6) tiene dos máximos.
- f) Una curva de frecuencia multimodal (7) tiene más de dos máximos.

3. GRÁFICOS DE PASTEL

Los gráficos de pastel son especialmente apropiados para ilustrar las divisiones de una cantidad total, tal como la distribución de los egresos o los ingresos de una empresa. Un gráfico de pastel en porcentajes es aquella en la que los valores se convierten en porcentajes para que resulte más fácil compararlos.



Ejemplo 3. De acuerdo a un sondeo a egresados de la Facultad de Administración y Negocios de la Universidad del Sur de California (USC) de Los Ángeles, los siguientes datos representan el número de egresados por especialidad. Construir un gráfico de pastel.

ESPECIALIDAD	GRADUADOS	PORCETAJE EGRESADOS (%)	ANGULO Grados (°)
Contador Fiscal	73	28.85	104
Finanzas	52	20.55	74
Gerencia	36	14.23	51
Mercadotecnia	64	25.30	91
Otros	28	11.07	40
TOTAL	253	100 %	360°

Calculo de ángulos:

CONTADOR FISCAL: $100\% - 360^\circ$
 $28.85\% - x$

$$x = \frac{(28.85\%)(360^\circ)}{100\%}$$

$$x = 103.86^\circ \approx 104^\circ$$

FINANZAS: $100\% - 360^\circ$
 $20.55\% - x$

$$x = \frac{(20.55\%)(360^\circ)}{100\%}$$

$$x = 73.98^\circ \approx 74^\circ$$

GERENCIA: $100\% - 360^\circ$
 $14.23\% - x$

$$x = \frac{(14.23\%)(360^\circ)}{100\%}$$

$$x = 51.23^\circ \approx 51^\circ$$

MERCADOTECNIA: $100\% - 360^\circ$
 $25.30\% - x$

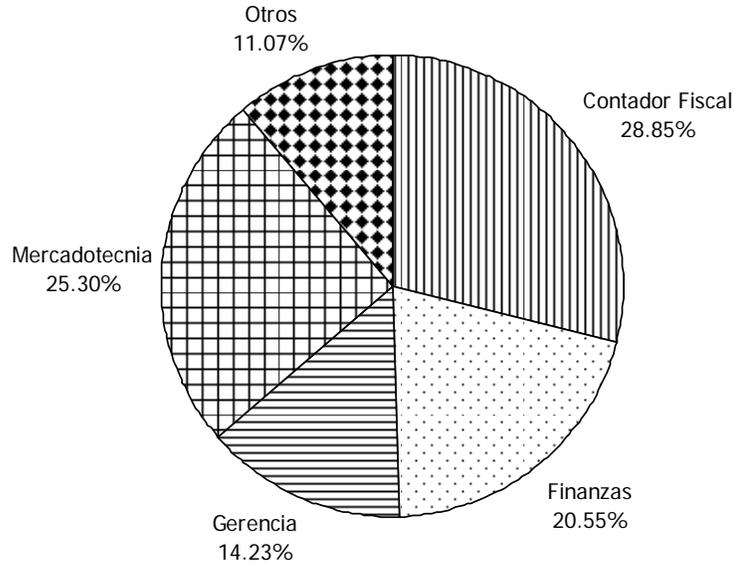
$$x = \frac{(25.30\%)(360^\circ)}{100\%}$$

$$x = 91.08^\circ \approx 91^\circ$$

OTROS: $100\% - 360^\circ$
 $11.07\% - x$

$$x = \frac{(11.07\%)(360^\circ)}{100\%}$$

$$x = 39.85^\circ \approx 40^\circ$$



Ejemplo 4. De acuerdo a un estudio de Mercado sobre preferencias en los medios masivos de comunicación, haciendo referencia a la televisión abierta de los EEUU. Los porcentajes de cada televisora corresponden al horario llamado "prime time" de 9:00 a 11:00 de la noche. Elaborar un gráfico de pastel con datos del estudio realizado entre septiembre de 1993 y abril de 1994.

TELEVISORAS	PORCETAJE AUDIENCIA (%)	ANGULO Grados (°)
CBS	23.00	83
ABC	20.00	72
NBC	18.00	65
FOX	11.00	40
Otros	28.00	100
TOTAL	100.00	360°

Calculo de ángulos:

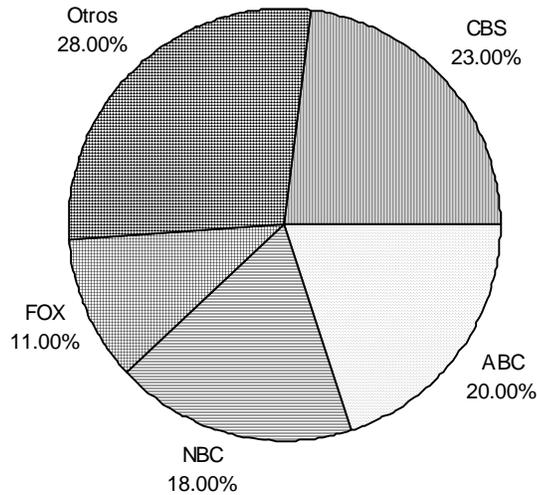
$$\text{CBS: } x = \frac{(23\%)(360^\circ)}{100\%} = 82.80 \approx 83^\circ$$

$$\text{ABC: } x = \frac{(20\%)(360^\circ)}{100\%} = 72.00 = 72^\circ$$

$$\text{NBC: } x = \frac{(18\%)(360^\circ)}{100\%} = 64.80 \approx 65^\circ$$

$$\text{FOX: } x = \frac{(11\%)(360^\circ)}{100\%} = 39.60 \approx 40^\circ$$

$$\text{OTROS: } x = \frac{(28\%)(360^\circ)}{100\%} = 100.80 \approx 101^\circ$$



Ejemplo 5. El “gigante” de las computadoras Hewlett Packard, dio a conocer el reporte de sus ventas durante el periodo de 1992 a Abril de 1993. Las ventas están en dólares. Construir un gráfico de pastel con dicha información.

DESCRIPCION DE ARTICULOS	VENTAS (dls)	PORCETAJE (%)	ANGULO Grados (°)
Computadora e Impresoras	7,401'000,000	76.30	275
Equipos de Prueba	1,135'000,000	11.70	42
Equipo Médico	553'000,000	5.70	21
Instrumental Analítico	349'000,000	3.60	13
Componentes Electrónicos	262'000,000	2.70	10
TOTAL	253	100 %	360°

Cálculo de ángulos:

Computadoras -Impresoras: $x = \frac{(76.3\%)(360^\circ)}{100\%} = 274.68 \approx 275^\circ$

Equipos de Prueba: $x = \frac{(11.7\%)(360^\circ)}{100\%} = 42.12 = 42^\circ$

Equipo Médico: $x = \frac{(5.7\%)(360^\circ)}{100\%} = 20.52 \approx 21^\circ$

Instrumental Analítico: $x = \frac{(3.6\%)(360^\circ)}{100\%} = 12.96 \approx 13^\circ$

Componentes Electrónicos: $x = \frac{(2.7\%)(360^\circ)}{100\%} = 9.72 \approx 10^\circ$



4. PROBLEMAS PROPUESTOS.

1. Con el siguiente grupo de números 13, 57,43, 22, 6, 19, 11, 9, 62, 35, 66, 24:
 - (a) Ordenar de menor a mayor.
 - (b) Hallar el intervalo de clase.

2. Los siguientes datos representan el número de clientes en el Restaurante “Sirlon Stokade” en los dos primeros meses de 2006

140	130	125	90	60	140	160	125	180	140
125	90	130	75	62	70	80	45	62	72
95	64	80	92	115	80	30	84	40	75
110	115	130	90	70	125	95	64	72	130
70	95	50	115	120	60	180	130	70	60
130	60	30	140	40	80	110	115	120	130

Encontrar:

- (a) El valor máximo
 - (b) El valor mínimo
 - (c) El rango
 - (d) Los siete mayores
 - (e) Los siete menores
 - (f) El treceavo en forma ascendente (de menor a mayor)
 - (g) Los días en que el número de clientes supera los tres dígitos
 - (h) Los días en que el número de clientes solo llega a los dos dígitos
 - (i) Construir una tabla de registros de datos (Distribución de Frecuencias)
 - (j) Construir un Histograma y el polígono de frecuencias
 - (k) Construir un polígono de frecuencias acumuladas
-
3. De acuerdo a la Secretaría de Turismo de Las Vegas Nevada, los siguientes son los principales hoteles con mayor número de cuartos, en la llamada “Ciudad del Juego”. Construir un gráfico de pastel con el porcentaje de cuartos que cubre cada uno de los hoteles de Las Vegas, Nevada.

HOTEL	# CUARTOS	HOTEL	# CUARTOS
The Orleáns Hotel	1426	New York-New York Hotel	2024
Wynn Las Vegas	2700	Excalibur Hotel	3991
South Coast Hotel	1350	Hilton, Las Vegas	3479
Treasure Island	2891	Imperial Palace Hotel	2700
MGM Grand Hotel	5034	Sahara Hotel	1720
Monte Carlo Resort	3003	Tropicana Hotel	1878
Luxor Las Vegas	4400		



Problemas para resolverse en equipo

4. En equipos de 4 personas, realizar lo siguiente:
- (a) Lanzar 4 monedas 50 veces y anotar el número de “sellos” obtenidos en cada ocasión.
 - (b) Construir una distribución de frecuencias que indique el número de veces que se han obtenido 0, 1, 2, 3 y 4 “sellos”.
 - (c) Construir una distribución de porcentajes correspondientes a la parte del inciso anterior.
 - (d) Comparar el porcentaje obtenido en (c) con los teóricos 6.25%, 25%, 37.5%, 25% y 6.25%, deducidos por las leyes de las probabilidades.

5. Los siguientes datos representan el número de horas ante grupo de un total de 40 Maestros (Catedráticos) del CONALEP Mexicali II, son horas durante una semana.

20	5	12	3	14	18	20	17	5	13
17	15	16	11	12	5	13	16	12	3
8	13	13	12	5	8	8	14	17	17
13	11	9	18	20	15	12	8	14	20

- (a) Construir una tabla de Registro de Datos.
 - (b) Construir un Histograma de polígonos de frecuencia.
 - (c) Construir un polígono de frecuencias acumuladas.
6. Hasta el día 12 de Mayo de 2006, así se encontraban las estadísticas de la Liga Americana de Béisbol Profesional:

EQUIPO	GANADOS	PERDIDOS
Boston	21	13
New York	19	13
Toronto	19	15
Baltimore	15	20
Tampa Bay	14	21
Chicago	23	10
Detroit	21	13
Cleveland	17	18
Minnesota	15	19
Kansas City	10	22
Texas	18	17
Oakland	17	17
Los Ángeles	15	20
Seattle	15	21

- (a) Construir un Histograma de los juegos ganados
- (b) Construir un Histograma de los juegos perdidos
- (c) Construir un Histograma de los juegos ganados y perdidos



7. Los trasatlánticos más grandes que han existido se enlistan en la siguiente tabla:

(a) Construya un gráfico de pastel con respecto al tonelaje de los barcos.

BARCO	EMPRESA	TONELADAS	MODELO
Titanic	White Star	46,329	1912
Queen Elizabeth 2	Cunard	70,327	1969
Queen Mary 2	Cunard	151,400	2004
Freedom of the seas	Royal Caribbean	160,000	2006

8. Los siguientes datos indican el numero de trabajadores que faltan a una fabrica en 50 días de trabajo:

13	5	13	37	10	16	2	11	6	12
8	21	12	11	7	7	9	16	49	18
3	11	19	6	15	10	14	10	7	24
11	3	6	10	4	6	32	9	12	7
29	12	9	19	8	20	15	5	17	10

(a) Hallar los cinco valores mayores.

(b) Hallar los cinco valores menores.

(c) Construir una tabla de Registro de Datos (Distribución de Frecuencias).

(d) Construir un Histograma y Polígono de frecuencias.

(e) Construir un Polígono de frecuencias acumuladas.

9. Las mediciones de la temperatura de licuación de un gas varían de 1161 a 1319°F (grados Fahrenheit). Construir una tabla con ocho clases iguales en las cuales estos datos podrían ser agrupados. Calcular:

(a) Los limites de clase

(b) Las fronteras de clase

(c) Las marcas de clase

(d) El intervalo de clase

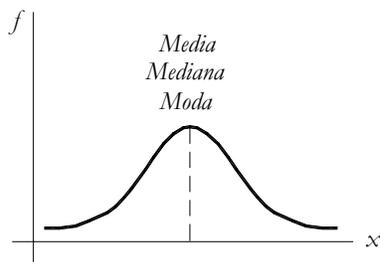
10. La siguiente tabla se basa en datos publicados en los Indicadores Económicos del Banco de México, y son datos preliminares correspondientes a diciembre de 1988. Construir una gráfica de pastel porcentual de las exportaciones de México.

CATEGORIA DE EXPORTACION	CANTIDAD (millones de dólares)
Petroleras	560.10
Agropecuarias	143.00
Extractivas	49.90
Manufactureras	951.10

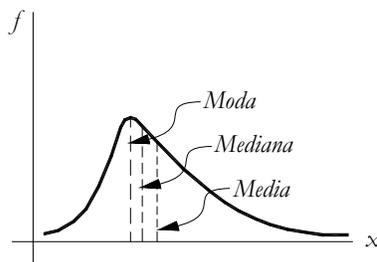
UNIDAD 3

MEDIDAS DE TENDENCIA

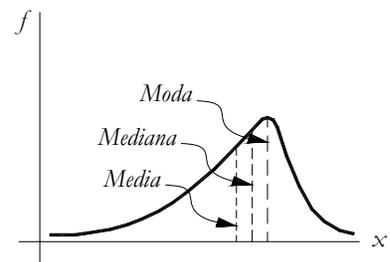
CENTRAL



1) Simetrica



2) Asimetria positiva



3) Asimetria negativa



1. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Un promedio es un valor típico o representativo de un conjunto de datos, como tales valores suelen situarse hacia el centro del conjunto de datos ordenados por magnitud, los promedios se conocen como *medidas de tendencia central*.

Se definen varios tipos, siendo los más comunes la media aritmética, la mediana, la moda y la media geométrica. Cada uno tiene ventajas y desventajas, según los datos y el objetivo perseguido.

MEDIA ARITMETICA (\bar{x})

La media aritmética o promedio aritmético, se define como la división de la suma de todos los valores entre el número de valores.

En Estadística es normal representar una medida descriptiva de una población, o parámetro poblacional, generalmente mediante letras griegas, en tanto que se utilizan letras romanas para las medidas descriptivas de muestras, conocidas también como "*Estadísticas Muestrales*".

La media aritmética, matemáticamente se expresa:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

donde:

\bar{x} = media aritmética.

x_i = suma total de datos que componen la población o muestra.

n = número de datos de la población o tamaño de la muestra.

Ejemplo ilustrativo 1. Calcular la media aritmética de los números: 9, 4, 6, 13 y 11

$$\bar{x} = \frac{9+4+6+13+11}{5}$$

$$\bar{x} = 8.60$$

Notación de Suma.

El símbolo $\sum_{i=1}^n x_i$ representará la suma de todos los x_i desde $i=1$ a $i=n$, por definición:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

Ejemplo ilustrativo 2. Escribir explícitamente los términos de la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^8 x_j = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

Debido a lo anterior, en el caso de datos agrupados, matemáticamente la media aritmética se expresa:



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \dots + f_n x_n}{n}$$

donde:

\bar{x} = media aritmética

f_i = frecuencia

x_i = marca de clase

n = número de datos de la población o tamaño de la muestra

Ejemplo ilustrativo 3. Calcular la media aritmética de los valores 6, 9, 7 y 3 si suceden con frecuencias de 4, 3, 5 y 2 respectivamente.

Marca de clase x	Frecuencia Relativa f
6	4
9	3
7	5
3	2

$$\bar{x} = \frac{6(4) + 9(3) + 7(5) + 3(2)}{4 + 3 + 5 + 2}$$

$$\bar{x} = 6.57$$

Ejemplo ilustrativo 4. Calcular la media aritmética de los valores mostrados en la tabla de distribución del Ejemplo 1 de la unidad II.

Intervalos de clase	Marca de clase x	Conteo	Frecuencia Relativa f	Frecuencia Acumulada F
62 - 65	63.50		10	10
66 - 69	67.50		14	24
70 - 73	71.50		14	38
74 - 77	75.50		13	51
78 - 81	79.50		7	58
82 - 85	83.50		2	60

$$\bar{x} = \frac{10(63.50) + 14(67.5) + 14(71.5) + 13(75.5) + 7(79.5) + 2(83.5)}{10 + 14 + 14 + 13 + 7 + 2}$$

$$\bar{x} = 71.43$$



LA MEDIA ARITMETICA PONDERADA

La media aritmética ponderada a veces se asocia con los números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ ciertos factores peso o "de peso" $w_1, w_2, w_3, \dots, w_k$, dependientes de la relevancia asignada a cada número, entonces:

$$\bar{x} = \frac{\sum wx}{\sum w} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \dots + w_kx_k}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_k}$$

se llama la media aritmética ponderada $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$.

Ejemplo ilustrativo 5. Si el examen final de Tópicos de Actualización cuenta tres veces más que una evaluación parcial y un estudiante tiene calificación 85 en el examen final y, 70 y 90 en los dos parciales, la calificación media es:

$$\bar{x} = \frac{1(70) + 1(90) + 3(85)}{1 + 1 + 3} = \frac{415}{5} = 83$$

LA MEDIANA (\tilde{x})

La mediana de un grupo es el valor del dato que ocupa un lugar de cuando se les agrupa a todos en ascendente o descendente. La mediana puede presentarse de dos formas:

a) Cuando el total de datos son un número impar. En este caso, la mediana será el dato que queda exactamente en el centro, una vez ordenados los datos de menor a mayor.

Ejemplo ilustrativo 6. Hallar la mediana de: 6, 4, 8, 8, 3, 4, 8
ordenando se tiene: 3, 4, 4, 6, 8, 8, 8
luego entonces $\tilde{x} = 6$

b) Cuando el total de datos son un número par. Aquí debemos aplicar la siguiente fórmula:

$$\tilde{x} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

donde $n =$ número total de datos.

Ejemplo ilustrativo 7. Hallar la mediana del conjunto de números:

3, 6, 10, 11, 10, 11, 3, 13, 19, 10, 12, 8,

$n = 12$, luego se acomodan de forma que se encuentren ordenados de menor a mayor

3, 3, 6, 8, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 13, 19

Aplicando la fórmula para poblaciones o muestras de número par:

$$\tilde{x} = \frac{x_{\left(\frac{12}{2}\right)} + x_{\left(\frac{12}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_6 + x_7}{2}$$

$$\tilde{x} = \frac{10+10}{2} = 10$$

LA MODA (\hat{x})

La Moda de un conjunto de números es el valor que sucede con mayor frecuencia, es decir, el valor mas frecuente. La moda puede no existir, o incluso no ser única en caso de existir; si existe dos veces, se llama bimodal.

Ejemplo ilustrativo 8. Hallar la moda del siguiente grupo de datos:

2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18

Una vez ordenados de menor a mayor, el número que mas veces se repite es el 9. La moda es 9.

En el caso de datos agrupados donde se haya construido una curva de frecuencias para ajustar los datos, la moda será el valor o valores de "x" correspondiente al máximo o "máximos" de la curva. La moda puede deducirse de una distribución de frecuencias o de un histograma a partir de la fórmula:

donde:

$$\hat{x} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) i$$

L_1 = Frontera inferior de la clase modal (clase que contiene la moda)

Δ_1 = Exceso de frecuencia modal sobre la de la clase inferior inmediata

Δ_2 = Exceso de la frecuencia modal sobre la clase superior inmediata

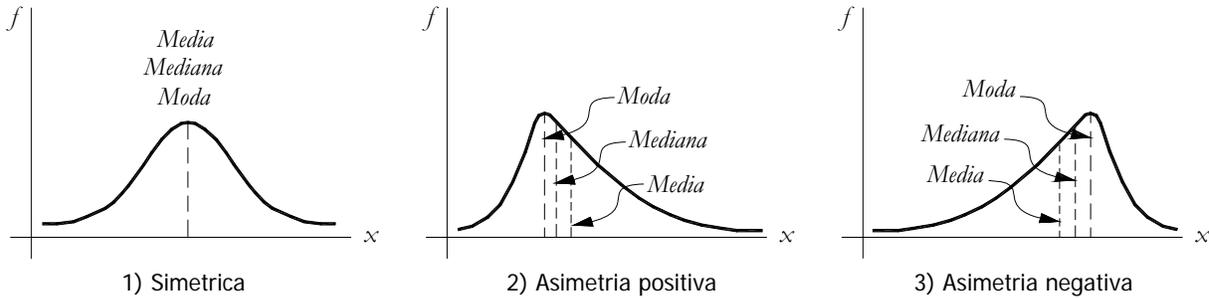
i = Ancho de intervalo de clase modal

2. RELACIÓN ENTRE LA MEDIA, LA MEDIANA Y LA MODA

Las diferencias entre los valores de la media, la mediana y la moda permiten saber la forma de la curva de frecuencias en términos de asimetría.

- a) Para una distribución unimodal *simétrica*, el valor de la media, la mediana y la moda es igual.
- b) Para una distribución *asimétrica positiva*, la media es el mayor valor de los tres y la mediana es mayor que la moda, pero menor que la media.
- c) Para una distribución *asimétrica negativa*, la media es el menor valor de los tres y la mediana es inferior a la moda, pero mayor que la media.

d) El *coeficiente de asimetría de Pearson*, es una medida conocida de asimetría que utiliza la diferencia observada entre la media y la mediana de un grupo de valores.



3. CUARTILES, DECILES Y PERCENTILES

Los cuartiles, deciles y percentiles se parecen mucho a la media porque también subdividen una distribución de mediciones de acuerdo con la proporción de frecuencias observadas. Mientras que la mediana divide a la distribución en dos mitades, los cuartiles la dividen en cuatro cuartos, los deciles en diez decimos y los puntos percentiles la dividen en cien partes. Matemáticamente, a manera de ejemplo, se pueden expresar:

$$Q_1 \text{ (Primer cuartil)} = x_{\left[\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)\right]}$$

$$D_3 \text{ (Tercer decil)} = x_{\left[\left(\frac{3n}{10} + \frac{1}{2}\right)\right]}$$

$$P_{70} \text{ (Percentil 70)} = x_{\left[\left(\frac{70n}{100} + \frac{1}{2}\right)\right]}$$

4. MEDIDAS DE DISPERSION

La dispersión o variación de los datos intenta dar una idea de lo esparcido que se encuentra estos. Hay varias medidas de tal dispersión, siendo las más comunes el rango, la desviación media, y la desviación típica.

a) RANGO (R)

El rango o recorrido de un conjunto de números es la diferencia entre el mayor y el menor de todos ellos; es una medida de dispersión que no se utiliza mucho.

$$\text{Rango} = R = x_{\max} - x_{\min}$$

Ejemplo ilustrativo 9. Encontrar el rango entre los siguientes valores:

a. $R = 9.5 - 1.5 = 8$

b. $R = 6 - 1 = 5$

como $8 > 5$, se dice que la variable en el primer histograma está más dispersa que en el segundo.



b) DESVIACION MEDIA (MD)

La desviación media o desviación promedio, de un conjunto de N números, $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ es abreviada por MD y se define como:

$$MD = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$$

donde:

\bar{x} = media aritmética de los números

$|x_i - x|$ = valor absoluto de la desviación de x_i respecto de \bar{x}

n = número de datos de la población o tamaño de la muestra

Ejemplo ilustrativo 10. Hallar el rango del siguiente conjunto de datos.

2, 3, 3, 5, 5, 5, 8, 10, 12

$x_{\max} = 12$

$x_{\min} = 2$

$R = x_{\max} - x_{\min} = 12 - 2 = 10$

Ejemplo ilustrativo 11. Hallar la desviación media del siguiente conjunto de números.

2, 3, 6, 8, 11

$$\bar{x} = \frac{2+3+6+8+11}{5} = 6$$

$$MD = \frac{|2-6|+|3-6|+|6-6|+|8-6|+|11-6|}{5} = \frac{|-4|+|-3|+|0|+|2|+|5|}{5} = \frac{4+3+0+2+5}{5} = \frac{14}{5}$$

MD = 2.8

c) VARIANZA (σ^2 ó S^2)

La varianza es similar a la desviación media porque de basa en la diferencia entre cada uno de los valores del conjunto de datos y la media del grupo. La diferencia consiste en que antes de sumarlas, se eleva al cuadrado cada una de las diferencias. Matemáticamente se expresa:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}{n}$$

donde:

σ^2 = Varianza Poblacional

S^2 = Varianza Muestral

\bar{x} = media aritmética.

x_i = suma total de datos que componen la población

n = número de datos de la población o tamaño de la muestra

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$



Ejemplo ilustrativo 12. En el mes de mayo, 8 vendedores de artículos electrónicos, vendieron los siguientes números de aparatos: 8, 11, 5, 14, 8, 11, 16, 11, las cuales se realizaron en "Tepito Electronics" en San Ysidro, California. Encontrar la varianza.

Cálculo de la media: $\bar{x} = \frac{8+11+5+14+8+11+16+11}{8} = \frac{84}{8} = 10.5$

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
5	-5.50	30.25
8	-2.50	6.25
8	-2.50	6.25
11	0.50	0.25
11	0.50	0.25
11	0.50	0.25
14	3.50	12.25
16	3.50	30.25

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{30.25 + 6.25 + 6.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 + 12.25 + 30.25}{8}$$

$$\sigma^2 = \frac{86}{8} = 10.75$$

d) DESVIACIÓN ESTANDAR (σ ó S)

En Estadística frecuentemente se aplica más la raíz cuadrada de la varianza a la cual se le llama Desviación Estándar, representándose por σ para la población y S para una muestra. Las formulas son:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}{n}}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

donde:

σ = Desviación Estándar Poblacional

S = Desviación Estándar muestral

\bar{x} = media aritmética.

x_i = suma total de datos que componen la población

n = número de datos de la población o tamaño de la muestra

La desviación estándar es especialmente útil cuando se le utiliza junto con la denominada Distribución Normal. En los siguientes capítulos se estudiará a fondo la Distribución Normal.



e) COMPROBACIÓN DE CHARLIER

La comprobación de Charlier en cálculos de la media y de la desviación típica por el método de compilación hace uso de las identidades.

$$\sum f(u + 1) = \sum fu + \sum f = \sum fu + n$$

$$\sum f(n + 1)^2 = \sum f(u^2 + 2n + 1) = \sum fu^2 + 2\sum fn + \sum f = \sum fu^2 + 2\sum fu + n$$

5. Miscelánea de Ejercicios

Ejercicio 1. En el restaurante “Nueva Asia” de la zona centro de Mexicali, se obtuvieron las siguientes cifras por el consumo de 15 personas de diversos platillos a la carta.

Sopa de pollo chica	25	Choap Suey de res	52	Pollo asado con hongos	50
Platillo A	29	Pollo asado	48	Sopa aleta de Tiburón	50
Platillo B	32	Pato asado	56	Arroz frito	44
Platillo C	35	Codorniz	62	Tofu y res	50
Platillo D	40	Bocón al vapor	55	Chow main	66

Determine la media (\bar{x}), mediana (\tilde{x}) y moda (\hat{x}), para el total de precios por cada uno de los platillos.

(a) La media aritmética (\bar{x})

$$\bar{x} = \frac{25 + 29 + 32 + 35 + 40 + 52 + 48 + 56 + 62 + 55 + 50 + 50 + 44 + 50 + 66}{15} = \frac{694}{15}$$

$$\bar{x} = 46.27$$

(b) La mediana (\tilde{x})

Ordenando de menor a mayor: 25, 29, 32, 35, 40, 44, 48, 50, 50, 50, 52, 55, 56, 62, 66

$$\tilde{x} = 50$$

(c) La moda (\hat{x}).

Es el dato que más veces se repite:

$$\hat{x} = 50$$

Ejercicio 2. De acuerdo a los datos del ejemplo anterior, hallar los valores de:

(a) El segundo cuartil

$$Q_2 = x_{\left[\frac{2n+1}{4}\right]}, \text{ donde } n=15$$

$$Q_2 = x_{\left[\frac{2(15)+1}{4}\right]} = x_{[7.5+0.5]} = x_8$$

$$Q_2 = 50$$



(b) El segundo decil

$$D_2 = x_{\left[\frac{2n+1}{10}\right]} = x_{\left[\frac{2(15)+1}{10}\right]} = x_{[3+0.5]} = x_{3.5}$$

$$x_{3.5} = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{32 + 35}{2}$$

$$D_2 = 33.5$$

(c) El punto percentil 40

$$P_{40} = x_{\left[\frac{40n+1}{100}\right]} = x_{\left[\frac{40(15)+1}{100}\right]} = x_{[6+0.5]} = x_{6.5}$$

$$x_{6.5} = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{44 + 48}{2}$$

$$P_{40} = 46$$

Ejercicio 3.

(a) Escribir explícitamente los términos de la suma $\sum_{i=1}^4 (y_i - 3)^2$

$$\sum_{i=1}^4 (y_i - 3)^2 = (y_1 - 3)^2 + (y_2 - 3)^2 + (y_3 - 3)^2 + (y_4 - 3)^2$$

(b) Expresar la suma en su notación abreviada de suma $f_1x_1^3 + f_2x_2^3 + \dots + f_{20}x_{20}^3$

$$f_1x_1^3 + f_2x_2^3 + \dots + f_{20}x_{20}^3 = \sum_{i=1}^{20} f_i x_i^3$$

Ejercicio 4. Sean las variables x e y las cuales forman parte de los valores:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 2 & y_1 = -3 \\ x_2 = -5 & y_2 = -8 \\ x_3 = 4 & y_3 = 10 \\ x_4 = -8 & y_4 = 6 \end{array}$$

Calcular: (a) $\sum x$ (b) $\sum y$ (c) $\sum xy$ (d) $\sum x^2$
 (e) $\sum y^2$ (f) $(\sum x)(\sum y)$ (g) $\sum xy^2$ (h) $\sum (x+y)(x-y)$

(a) $\sum x = 2 + (-5) + 4 + (-8) = 2 - 5 + 4 - 8 = -7$

(b) $\sum y = (-3) + (-8) + 10 + 6 = -3 - 8 + 10 + 6 = 5$

(c) $\sum xy = (2)(-3) + (-5)(-8) + (4)(10) + (-8)(6) = -6 + 40 + 40 - 48 = 26$

(d) $\sum x^2 = (2)^2 + (-5)^2 + (4)^2 + (-8)^2 = 4 + 25 + 16 + 64 = 109$



$$(e) \sum y^2 = (-3)^2 + (-8)^2 + (10)^2 + (6)^2 = 9 + 64 + 100 + 36 = 209$$

$$(f) (\sum x)(\sum y) = (-7)(5) = -35$$

$$(g) \sum xy^2 = (2)(-3)^2 + (-5)(-8)^2 + (4)(10)^2 + (-8)(6)^2 = 18 - 320 + 400 - 288 = -190$$

$$(h) \sum (x + y)(x - y) = \sum (x^2 - y^2) = \sum x^2 - \sum y^2 = 109 - 209 = -100$$

Ejercicio 5. Las calificaciones de Carolina del grupo 2EP en cuatro asignaturas fueron 83, 88, 92 y 96. Si los respectivos créditos otorgados a estos cursos son 3, 6, 4, 2. Determinar una calificación media apropiada.

Aplicaremos la media aritmética ponderada donde: $x = 83, 88, 92, 96$ y $w = 3, 6, 4, 2$

$$\bar{x} = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

$$\bar{x} = \frac{(83)(3) + (88)(6) + (92)(4) + (96)(2)}{3 + 6 + 4 + 2} = \frac{249 + 528 + 368 + 192}{15} = 89.13$$

Ejercicio 6. Los siguientes datos representan el numero total de pasajeros que utiliza la ruta Caléxico - El Centro de la empresa "Número Uno Shuttle". El total de corridas en un día de servicio son un total de 38 viajes.

52	23	29	32	54	50	48	40	34	32
36	28	22	26	27	35	38	40	46	44
50	43	36	30	26	23	25	28	24	31
23	39	33	22	24	27	22	29		

Hallar:

- El viaje con mayor numero de pasajeros
- El viaje con menor numero de pasajeros
- Los 5 viajes con mas pasajeros
- Los 5 viajes con menos pasajeros
- Construir una tabla de registro de datos
- Construir un histograma y un poligono de frecuencias
- Hallar la media (\bar{x}), mediana (\tilde{x}), moda (\hat{x}), varianza (σ^2) y desviación típica (σ).

Solución:

- 54 mas alta
- 22 mas baja
- 54, 52, 50, 50, 48
- 22, 22, 22, 23, 23
- Primeramente, calcularemos el número de clases:



$$n_o = 1 + 3.32 \log n, \text{ donde } n = 38$$

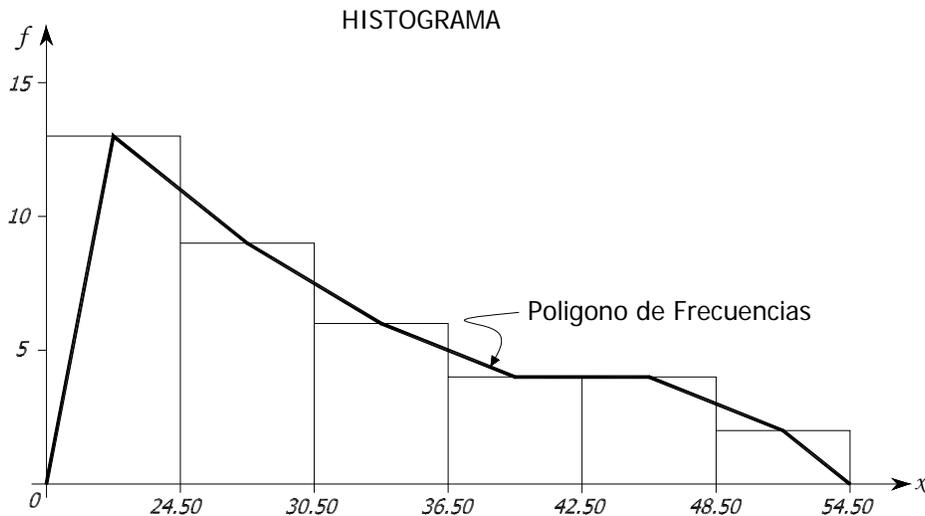
$$n_o = 1 + 3.32 \log 38 = 1 + 3.32(1.5798) = 6.24$$

Segundo, se calculará la Amplitud de clase:

$$A = \frac{V \text{ max} - V \text{ min}}{n_o} = \frac{54 - 22}{6.24} = 5.13$$

Como dicha amplitud debe estar en números enteros: $A = 5$

Intervalos de clase	Marca de clase x	Conteo	Frecuencia Relativa f	Frecuencia Acumulada F	xf	$x^2 f$
22 – 27	24.50		13	13	318.50	7803.25
28 – 33	30.50		9	22	274.50	8372.25
34 – 39	36.50		6	28	219.00	7993.50
40 – 45	42.50		4	32	170.00	7225.00
46 – 51	48.50		4	36	194.00	9409.00
52 - 57	54.50		2	38	109.00	5940.50



(g) Cálculo de media (\bar{x}), mediana (\tilde{x}), moda (\hat{x}), varianza (σ^2) y desviación típica (σ)

Media Aritmética:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{1285}{38} = 33.81$$

El valor obtenido representa que el promedio de los 38 viajes es de 34 pasajeros por viaje.

Mediana: Como $n = 38$, la población de datos es número par entonces:

$$\tilde{x} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{19} + x_{20}}{2}$$

Ordenador de menor a mayor el segundo intervalo: 28, 28, 29, 29, 30, 31, 32



$$\bar{x} = \frac{31 + 32}{2} = 31.50$$

La Moda: $\bar{x}_1 = 22$, $\bar{x}_2 = 23$; es Bimodal

La Varianza (σ^2): Para datos agrupados:

$$\sigma^2 = \frac{(\sum f)(\sum x^2 f) - (\sum xf)^2}{(\sum f)(\sum f - 1)} = \frac{(38)(46743.50) - (1285)^2}{(38)(37)} = \frac{125028}{1406} = 88.92$$

La Desviación típica (σ):

$$\sigma = \sqrt{88.92} = 9.43$$

Ejercicio 7. Calcular la desviación media, la varianza y la desviación estándar del ejemplo 1. La media muestral para este grupo de valores fue de 46.27.

\bar{x}	$x - \bar{x}$	$ x - \bar{x} $	$(x - \bar{x})^2$	x^2
25	-21.27	21.27	452.41	625
29	-17.27	17.27	298.25	841
32	-14.27	14.27	203.63	1024
35	-11.27	11.27	127.01	1225
40	-6.27	6.27	39.31	1600
44	-2.27	2.27	5.15	1936
48	1.73	1.73	2.99	2304
50	3.73	3.73	13.91	2500
50	3.73	3.73	13.91	2500
50	3.73	3.73	13.91	2500
52	5.73	5.73	32.83	2704
55	8.73	8.73	76.21	3025
56	9.73	9.73	94.67	3136
62	15.73	15.73	247.43	3844
66	19.73	19.73	389.27	4356
		145.19	2010.89	34120

La Desviación Media (MD):

$$MD = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} = \frac{145.19}{15} = 9.68$$

La Varianza (σ^2):

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{2010.89}{14} = 143.63$$

La Desviación Estándar (σ):



$$\sigma = \sqrt{143.63} = 11.98$$

Comprobación: Podemos aplicar también la llamada fórmula abreviada alternativa

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2 - n\bar{x}^2}{n - 1} = \frac{34120 - 15(46.27)^2}{15 - 1} = 143.31$$

$$\sigma = \sqrt{143.31} = 11.97$$

Ejercicio 8. Cuatro grupos de estudiantes consistentes en 30, 40, 20 y 36 individuos dieron pesos medios de 74, 68, 70, y 64 kg, respectivamente. Hallar el peso medio de todos los estudiantes.

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum x} = \frac{30(74) + 40(68) + 20(70) + 36(64)}{30 + 40 + 20 + 36} = \frac{8644}{126} = 68.60kg$$

Ejercicio 9. Determinar la media, mediana, moda, varianza, desviación estándar y desviación media, de la tabla mostrada, la cual representa una muestra de los salarios promedio de 20 empleados por día en la fabrica PIMSA.

\bar{x}	$x - \bar{x}$	$ x - \bar{x} $	$(x - \bar{x})^2$
240	-30.5	30.5	930.25
240	-30.5	30.5	930.25
240	-30.5	30.5	930.25
240	-30.5	30.5	930.25
240	-30.5	30.5	930.25
240	-30.5	30.5	930.25
240	-30.5	30.5	930.25
240	-30.5	30.5	930.25
240	-30.5	30.5	930.25
255	-15.5	15.5	240.25
255	-15.5	15.5	240.25
265	-5.5	5.5	30.25
265	-5.5	5.5	30.25
280	9.5	9.5	90.25
280	9.5	9.5	90.25
290	19.5	19.5	380.25
300	29.5	29.5	870.25
305	34.5	34.5	1190.25
325	54.5	54.5	2970.25
330	59.5	59.5	3540.25
340	69.5	69.5	4830.25
		572	21945



$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{x} = \frac{8(240) + 2(225) + 2(265) + 2(280) + 290 + 300 + 305 + 325 + 330 + 340}{20} = \frac{5410}{20} = 270.50$$

$$\tilde{x} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{255 + 265}{2} = 260$$

$$\hat{x} = 240$$

$$MD = \frac{\sum |x - \bar{x}|^2}{n} = \frac{572}{20} = 28.60$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{21945}{20 - 1} = 1155$$

$$S = \sqrt{1155} = 33.98$$

Ejercicio 10. Los siguientes datos representan 105 muestras de concreto de la obra civil “El Caracol” en Amecameca, Estado de México. La resistencia del concreto es de 250Kg/cm² y la edad del ensayo es a 28 días. Las unidades de medida en los datos son en Kg./cm² de resistencia a la comprensión del concreto.

253 274 249 204 265 309 260 236 211 273 225
318 270 249 248 274 260 287 226 249 227 233
291 311 238 276 246 240 356 224 236 211 226
280 300 207 260 275 250 260 219 238 219 238
211 301 244 214 250 227 260 211 252 210 203
301 304 234 236 232 252 255 205 248 215
240 290 260 217 294 232 270 260 252 189
302 301 234 240 294 256 326 250 237 204
264 265 287 271 297 276 245 241 261 208
259 284 244 239 337 249 261 226 245 196

- (a) construir una tabla de registro de datos
- (b) construir un histograma y un polígono de frecuencia.
- (c) Calcular la media
- (d) Calcular la mediana
- (e) Calcular la moda
- (f) Calcular la varianza poblacional y la desviación estándar



Solución

(a) tabla de registro de datos

Numero de clases: $No. = 1 + 32.3 \log N$ $No.=1 + 3.32 \log 105$ $No.=1 + 3.32 (2.02)$

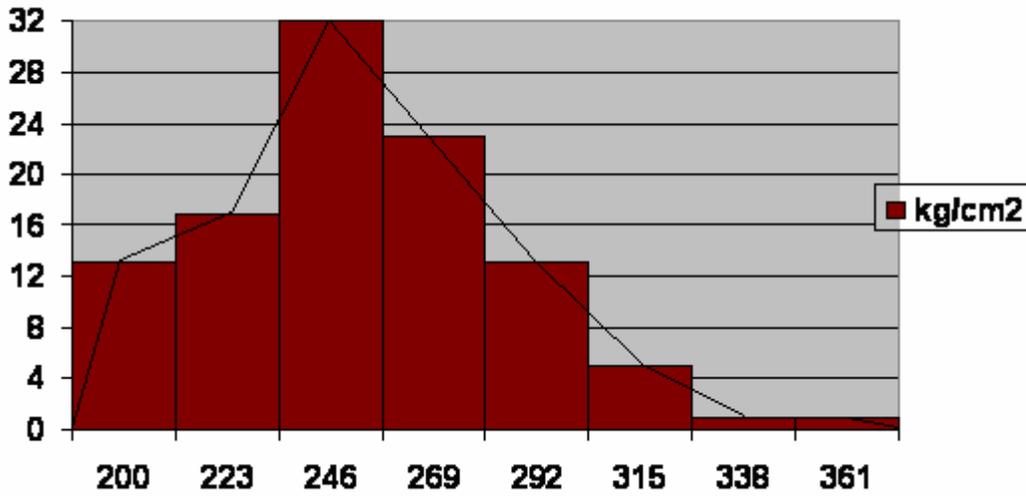
$No.= 7.71$

Amplitud de clase: $A=\frac{V_{max} - V_{min}}{No.}$ $A=\frac{356 - 189}{7.71}$ $A=21.66$

$No. = 7.71$

Como el valor de la amplitud de clase debe ser exacto: **A=22**

Intervalo de clase	Marca de clase	conteo	frecuencia	Frecuencia acumulada	Xf	X ² f
<u>189-211</u>	200	//// //// ///	13	13	2600	520000
212-234	223	//// //// //// //	17	30	3791	845393
235-257	246	//// //// //// ////	32	62	7872	1936512
258-280	269	////	23	85	3787	1664303
281-303	292	//// //// //// ////	13	98	3796	1108432
304-326	315	////	5	103	1575	496125
327-349	338	//// //// ///	1	104	338	114244
350-372	361	////	1	105	361	130321
		/			26520	6815330
		/				



(c) la media aritmética: $X = \frac{\sum Xf}{\sum f}$ $X = \frac{26520}{105}$ $\bar{x} = 252.57 \text{ kg/cm}^2$

(d) la mediana (X) : ordenando la población de datos de menor a mayor, como es una población impar entonces la mediana será el dato 53.

236, 236, 237, 238, 238, 238, 239, 240, 240, 240, 241, 244, 244, 245, 245, 246, 248, 248, 249, 249, 249, 249 dato 53, luego entonces $X = 249 \text{ Kg/cm}^2$

(e) la moda (M) el dato que mas se repite $M = 249 \text{ Kg./cm}^2$

(f) la varianza (σ^2) : $\sigma^2 = \frac{(\sum f)(\sum x^2 f) - (\sum f)^2}{(\sum f)(\sum f - 1)}$ $\sigma^2 = \frac{(105)(6815330) - (26520)^2}{(105)(104)}$

$\sigma^2 = \frac{12299250}{10920}$ $\sigma^2 = 1126.30$

La formula de la varianza aplicada es para datos agrupados y para población

La desviación estándar (σ): $\sigma = \sqrt{1126.30}$ $\sigma = 33.56 \text{ Kg/cm}^2$

Ejercicio 10. la tabla muestra una distribución de frecuencia de los salarios semanales de 65 jornaleros agrícolas de la compañía "El Don" del valle imperial determinar de esa tabla:



- (a) el limite interior de la sexta clase
- (b) el limite superior de la cuarta clase
- (c) la marca de clase de la tercera clase
- (d) las fronteras de clase del quinto intervalo
- (e) la anchura del quinto intervalo de clase
- (f) la frecuencia de la tercera clase
- (g) la frecuencia relativa a la tercera clase
- (h) el porcentaje de empleados que cobran menos de 300 dlls a la semana
- (i) hallar los cuarteles Q_1, Q_2, Q_3
- (j) hallar los deciles D_1, D_2, \dots, D_9 para los salarios de los 65 jornaleros.

Salarios	jornaleros
270 – 279.99 Dlls.	8
280 – 289.99	10
290 – 299.99	16
300 – 319.99	14
310 – 319.99	10
320 – 329.99	5
330 – 339.99	<u>2</u>
Total	65

Solución

- (a) 320 dlls.
- (b) 309.99 dlls.
- (c) $(290 + 299.99)/2 = 294.995$ dlls.
- (d) La frontera de clase inferior de la quinta clase $= (310 + 309.99)/2 = 309.995$ la frontera de clase de superior $= (319.99 + 320)/2 = 319.995$
- (e) Anchura = frontera superior - frontera inferior $319.99 - 309.99 = 10$ dlls.
- (f) 16
- (g) $16/65 = 0.2461 = 24.61\%$
- (h) Jornaleros que ganan menos de 300 dlls por semana $= 8 + 10 + 16 = 34$, luego: $34/65 = 52.31\%$



- (i) El primer cuartil $Q_1=65/4 = 16.25$. como la primera clase tiene 8 casos (16.25 - 8 = 8.25) de los casos de la segunda por interpolación

$$Q_1 = \text{limite superior} + \frac{8.25}{10} (10 \text{ dlls})$$

Primera frontera 10

$$Q_1 = 279.99 + \frac{8.25}{10} (10 \text{ dlls}) \quad \mathbf{Q_1 = 288.24 \text{ dlls}}$$

El segundo cuartil $Q_2=2N/4 \quad Q_2=N/2 \quad Q_2=65/2 \quad Q_2=32.50$ cosas

Luego $32,50 - 18 = 14.50$ de los 16 casos de la tercera clase.

$$Q_2 = 1.s. \text{ segunda} + \frac{14.50}{16} (10 \text{ dlls}) \quad Q_2 = 289.99 + \frac{14.50}{16} (10 \text{ dlls}) \quad Q_2 = 299.99$$

El tercer cuartil $Q_3 = 3N/4 \quad Q_3=3(65)/4 \quad Q_3=48.75$ luego $48.75 - 48 = 0.75$

$Q_3 = 1.s. \text{ cuarta} + \frac{0.75}{10} (10 \text{ dlls}) \quad Q_3 = 309.99 + \frac{0.75}{10} (10 \text{ dlls}) \quad Q_3 = 310.74$

Frontera 10 10

los deciles primero, segundo, Y noveno se obtienen cuando $N/10, 2N/10, 3N/10, \dots, 9N/10$

$$D_1 = 279.99 + \frac{6.5}{8} (10 \text{ dlls}) = 288.11 \text{ dlls.}$$

$$D_2 = N/5 = 65/5 = 13 - 8 = 5$$

$$D_2 = 289.99 + 5/10(10\text{dlls}) = 295 \text{ dlls}$$

$$D_3 = 3N/10 = 3(65)/10 = 19.50 - 18 = 1.5$$

$$D_3 = 299.99 + 1.5/16(10\text{dlls}) = 300.93\text{dlls}$$

$$D_4 = 4N/10 = 4(65)/10 = 26 - 18 = 8$$

$$D_4 = 299.99 + 8/16 (10\text{dlls}) = 305\text{dlls}$$

$$D_5 = N/2 = 65/2 = 32.50 - 18 = 14.50$$

$$D_5 = 299.99 + 14.50/16(10\text{dlls}) = 309.05\text{dlls}$$

$$D_6 = 6N/10 = 6(65)/10 = 39 - 34 = 5$$

$$D_6 = 309.99 + 5/14 (10\text{dlls}) = 313.56\text{dlls}$$

$$D_7 = 7N/10 = 7(65)/10 = 45.50 - 34 = 11.50$$

$$D_7 = 309.99 + 11.50/14 (10\text{dlls}) = 318.20\text{dlls}$$

$$D_8 = 8N/10 = 8(65)/10 = 52 - 48 = 4$$

$$D_8 = 319.99 + 4/10(10\text{dlls}) = 324\text{dlls}$$

$$D_9 = 9N/10 = 9(65)/10 = 58.5 - 5 = 0.50$$

$$D_9 = 329.99 + 0.50/5 (10\text{dlls}) = 331\text{dlls}$$

Conclusión: El 10% de los jornaleros gana 288.11 dlls por semana, el 20% obtiene 295dlls, el 30% alcanza los 300.93dlls, el 40% obtiene 305dlls, el 50% le llega a 309.05dlls, en tanto el 60% alcanza los 313.56. el 70% gana 318.20dlls, el 80% llega a ganar 324dlls y el 90% asegura las 331 dlls. Para todos los casos, son los salarios mostrados pero pueden ser menos de lo calculado.



6. PROBLEMAS PROPUESTOS

1; anotar el termino de la suma indicada

$$\sum_{J=1}^7 f_j X_j^2$$

2: escribir los términos de la suma indicada.

$$\sum_{J=1}^4 V_j (V_j + 6)$$

3. explicar en notación abreviada la suma.

(a) $(X_1 + 5)^4 + (X_2 + 5)^4 + (X_3 + 5)^4 + (X_4 + 5)^4 + (X_5 + 5)^4$

(b) $g_1 (X_1 - a)^2 + g_2 (X_2 - a)^2 + g_3 (X_3 - a)^2 + \dots + g_7 (X_7 - a)^2$

4. expresar en notación abreviada de suma

(a) $(4X_1 - 6y_1) + (4X_2 - 6y_2) + (4X_3 - 6y_3) + (4X_4 - 6y_4) + (4X_5 - 6y_5) + (4X_6 - 6y_6) + (4X_7 - 6y_7) + (4X_8 - 6y_8) + (4X_9 - 6y_9)$

5: las calificaciones finales de los estudiantes del 2FP del CECyTE Xochimilco en las asignaturas de geometría y trigonometría fueron: 7, 5, 8 y 10. Hallar la media aritmética

6: los siguientes datos representan las 10 calificaciones de una muestra de un grupo de cuarto semestre del CECyTE de Ensenada: 65, 66, 67, 68, 71, 73, 74, 77, 77, 77. Hallar la media (X), mediana (X), y moda (M).

7. En la siguiente tabla se muestra las edades de las motociclistas que an cometido faltas al reglamento de transito del estado de Baja California:



17 38 27 14 18 34 16 42 28 24 40 20 23 31

37 21 30 25 17 28 33 25 23 19 51 18 29

- (a) construir una tabla de registro de datos
- (b) construir un histograma y polígono de frecuencia
- (c) calcular la media, mediana, y moda.
- (d) Calcular la varianza y la desviación típica

8. en la tabla se muestran 30 resultados del examen ESL para profesionistas extranjeros, los cuales mostraron solicitud para ejercer en el estado de nevada:

500 510 514 514 516 519 521 522 522 527

528 535 540 542 545 553 555 558 561 571

572 574 577 578 580 583 584 588 589 592

- (a) Anotar las cinco calificaciones menores.
- (b) Anotar las cinco calificaciones mayores.
- (c) Construir un histograma y polígono de frecuencia.
- (d) Calcular la media, mediana, y moda
- (e) Calcular la varianza y la desviación estándar.

9. la siguiente tabla representan las temperaturas de 106 habitantes de "El Florido" en Tijuana, llevadas a cabo por una brigada de estudiantes de la UABC. Las temperaturas Están medidas en grados Celsius.

35.8 36.3 36.4 36.6 36.7 36.8 36.9 37.0 37.0 37.1 37.3

36.0 36.3 36.4 36.6 36.7 36.8 36.9 37.0 37.0 37.1 37.3

36.1 36.3 36.4 36.7 36.7 36.9 36.9 37.0 37.0 37.1 37.4

36.1 36.3 36.5 36.7 36.7 36.9 36.9 37.0 37.0 37.1 37.4

36.1 36.3 36.6 36.7 36.7 36.9 36.9 37.0 37.0 37.1 37.5

36.2 36.4 36.6 36.7 36.8 36.9 36.9 37.0 37.0 37.1 37.5

36.2 36.4 36.6 36.7 36.8 36.9 36.9 37.0 37.0 37.2

36.2 36.4 36.6 36.7 36.8 36.9 36.9 37.0 37.0 37.2

36.2 36.4 36.6 36.7 36.8 36.9 37.0 37.0 37.0 37.2

36.3 36.4 36.6 36.7 36.8 36.9 37.0 37.0 37.1 37.2



- (a) Anotar las siete temperaturas menores
- (b) Anotar las siete temperaturas mayores
- (c) Construir una tabla de registro de datos
- (d) Construir un histograma y un polígono de frecuencia
- (e) Calcular la media, mediana, y moda.
- (f) Calcular la varianza y desviación estándar

10. Hallar la media y la mediana de: 6, 5, 9, 4, 8, 3, 10.

11. Hallar la media, mediana y moda de: 9, 12, 5, 4, 3, 6, 11, 7, 5, 2, 11, 9, 13, 7, 6, 8.

12. la siguiente tabla muestra los cocientes de inteligencia (IQ) de 480 niños
De una escuela primaria de la colonia "valle dorado" de Ensenada.

Marca de clase (X)	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
frecuencia (f)	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

Hallar:

- (a) la media aritmética (X)
- (b) la varianza (σ^2)
- (c) la desviación estándar(σ)

13. para el conjunto de números 8, 10, 9, 12, 4, 8, 2. Hallar la desviación media respecto de:

- (a) la media aritmética (X)
- (b) La mediana (X)
- (c) verificar que la desviación media de la mediana no es mayor que la media

14. El numero de automóviles que vendió cada uno de los 10 ejecutivos de cuenta de "auto productos del pacifico" en el mes de diciembre es: 2, 4, 7, 10, 10, 10, 12, 12, 14, y 15; determinar:

- (a) La media, mediana, y moda.
- (b) El primer cuartil
- (c) El segundo decil



(d) El punto percentil 30 para los importes de ventas.

15. El servicio postal mexicano (SEPOMEX) determino que los pesos de una muestra de cartas procesadas en una oficina postal, pesada hasta el gramo mas próximo son: 21, 18, 30, 12, 14, 17, 18, 27, 31, y 35; determinar

- (a) la media mediana y moda de los pesos de las cartas en gramos
- (b) El tercer cuartil
- (c) El tercer decil
- (d) El punto percentil 70

16. los siguientes resultados representan los resultados de un examen de una muestra de 20 estudiantes del grupo 4CM de la asignatura de "Mantenimiento de calderas" : 38, 45, 56, 64, 69, 71, 71, 74, 76, 78, 80, 80, 83, 83, 83, 86, 92, 93, 96, y 96; determinar:

- (a) La media, mediana y moda
- (b) El segundo cuartil
- (c) El noveno decil
- (d) El punto percentil 50, para las calificaciones del examen

17. la siguiente tabla muestra una distribución de frecuencias de puntuaciones de un examen final de algebra de tres grupos del turno vespertino del Conalep Mexicali II de la especialidad de informática

Calificaciones	Total estudiantes
90 – 100	9
80 – 89	32
70 – 79	43
60 – 69	21
50 – 59	11
40 – 49	3
30 – 39	1
	Total= 120



- (a) Hallar los cuartiles de la distribución
- (b) Interpretar su significado

18. en la tabla se muestra el numero de trabajadores que faltan a la empresa "Sony Corporation" en mesa de okay de Tijuana durante 50 días de trabajo en el primer trimestre del 2006.

13 5 13 37 10 16 2 11 6 12
 8 21 12 11 7 7 9 16 49 18
 3 11 19 6 15 10 14 10 7 24
 11 3 6 10 4 6 32 9 12 7
 29 12 9 19 8 20 15 5 17 10

- (a) construir una tabla de registro de datos
- (b) construir un histograma y polígono de frecuencia
- (c) calcular la media, mediana, y moda.
- (d) Calcular la varianza y la desviación estándar

19. en la tabla se muestran las mediciones de la resistencia al punto de ruptura de 60 hilos de cáñamo, esto debido al control de calidad. Las mediciones de resistencia se obtuvieron en onzas (oz.).

35.5 15.2 35.4 21.3 28.4 26.9 34.6 29.3 24.5 31.0
 21.2 28.3 27.1 25.0 32.7 29.5 30.2 23.9 23.0 26.4
 27.3 33.7 29.4 21.9 29.3 17.3 29.0 36.8 29.2 23.5
 20.6 29.5 21.8 37.5 33.5 29.6 26.3 28.7 34.8 18.6
 25.4 34.1 27.5 29.6 22.2 22.7 31.3 33.2 37.0 28.3
 36.9 24.6 28.5 24.8 28.1 25.4 34.5 23.6 38.4 24.0

- (a) construir la tabla de registro de datos.
- (b) Construir un histograma y polígono de frecuencia
- (c) Construir y polígono de frecuencia acumulada

20. las mediciones de la temperatura de ignición del gas natural en la empresa proveedora del energético "eco gas" de Mexicali, en una muestra de 15 mediciones en grados Celsius, fueron:

166 141 136 153 170

162 155 146 183 157

148 132 160 175 150

- (a) Calcular la media, mediana y moda.
- (b) Construir un histograma y polígono de frecuencia
- (c) Hallar el primer, segundo y tercer, cuartil.

UNIDAD 4

INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD



TÉCNICAS DE CONTEO Y PROBABILIDAD

Introducción

Hemos visto que la estadística consiste en herramientas y métodos que nos permite evaluar la confiabilidad de conclusiones obtenidas a partir de datos muestrales. La estadística descriptiva nos asiste la recolección de información y datos en el campo, por ejemplo si se requiere ejecutar un estudio sobre el cultivo de trigo en el valle de Mexicali, tendríamos que entrevistar a una parte de los agricultores que siembran el rubio cereal en la capital de Baja California. Posteriormente con la aplicación de las teorías de probabilidad a los datos obtenidos en campo de la estadística descriptiva con ello obtenemos certidumbre en la toma de decisiones, a esto se le llama estadística inferencial.

1. Álgebra de Eventos

Conjunto: un conjunto es una colección de objetos bien claros y definidos, los cuales tienen una característica en común. A los objetos se les llama elementos del conjunto.

Ejemplos:

1.- El conjunto de planteles de Cecyte en Baja California. Un conjunto generalmente se representa por una letra mayúscula y sus elementos agrupados entre llaves. Los representaremos por la letra C.

$C = \{Xochimilco, Compuertas, El Florido, El Pacifico, Tijuana, Zona Río, Ensenada\}$

2.- El conjunto de los días de la semana, los que representaremos por la letra S:

$S = \{\text{Domingo, Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado}\}$

3.- El conjunto de números de dígitos representados por D:

$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

4.- El conjunto de alumnos que obtuvieron 10 en el examen parcial 2 del grupo 2CP del Plantel Xochimilco vespertino en la asignatura Eficiencia de Tiempos y Movimientos. El conjunto se representa por E:

$E = \{\text{Victor, Daniel, Adriana, Antonio, Jorge, Lucia, Edwin}\}$

Ejemplo 5. Los integrantes del grupo "the Beatles", representados por B: {John, paul, ringo, George}

Otros ejemplos de conjuntos son:

(a) un ejército es un conjunto de soldados.

(b) una parvada es un conjunto de aves como palomas, huilotas, faisanes, pericos, tucanes, chachalacas, etc.

(c) un enjambre es un conjunto de insectos como moscas, alimañas, abejas, cigarrones, etc.

(d) una zahúrda es un conjunto de cerdos, puercos o lechones exclusivamente.

(e) una manada es un conjunto de bestias.

(f) una jauría es un conjunto de animales peligrosos como perros, lobos, dingos, entre otros depredadores.

ESPACIO MUESTRA (S)

Son todas las formas posibles en que pueda suceder un experimento. Se representa por S o U.

EVENTO

Un evento se define como la posibilidad que ocurra un suceso de interés.

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Son los eventos en los cuales en la aparición de uno evita la aparición de otro evento

EVENTO COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVO

Con la unión de estos eventos se genera el espacio muestra

2. NOTACION DE CONJUNTOS

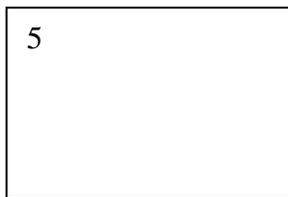
{ } conjunto	< menor que
\emptyset conjunto vacío	\geq mayor o igual que
C subconjunto	\leq menor o igual que
C subconjunto propio	U unión de
tal que	\cap intersección de
\in pertenece a	- diferencia de
\notin no pertenece a	\bar{A} conjunto complemento de A
= igual a	AUB unión de conjunto A y B
\neq diferente a	$C \cap D$ intersección de C y D
\approx aproximado a	$A - B$ diferencia de A y B
> mayor que	\bar{B} conjunto complemento de B

3. DIAGRAMAS DE VENN

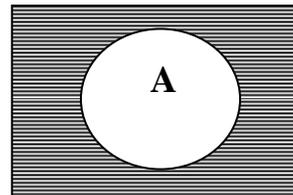
los diagramas de Venn son figuras geométricas cerradas que se utilizan para representar operaciones entre conjuntos.

esta representación de un conjunto se llama grafica del conjunto o el diagrama de Venn, en honor del matemático ingles de siglo xix, John Venn. en otros países les llaman diagramas de Euler en honor al eminente matemático suizo-alemán Leonard Euler (1707-1783), quien 100 años antes ya utilizaba estos diagramas.

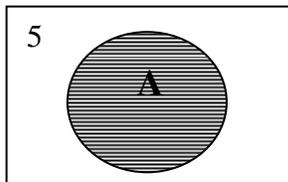
DIAGRAMAS DE VENN



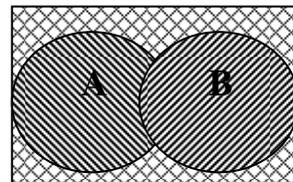
espacio muestra



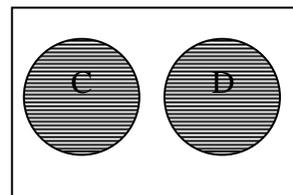
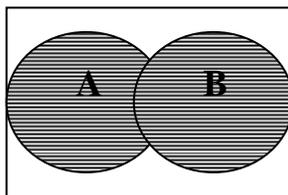
\bar{A}

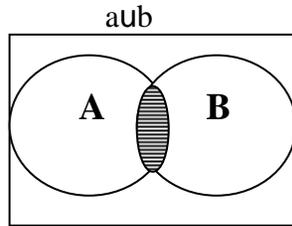


CONJUNTO A

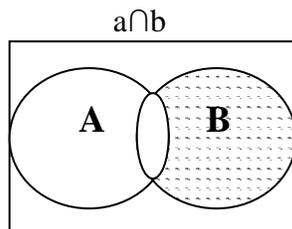
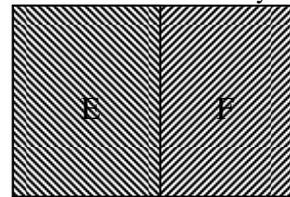


$\overline{A \cap B}$

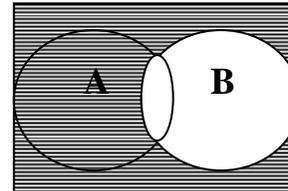




eventos mutuamente excluyentes



eventos colectivamente exhaustivos



$A - B$

$\overline{B - A}$

4. LEYES DEL ÁLGEBRA DE EVENTOS

1.- LEYES DE IDEMPOTENCIA

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

2.- LEYES ASOCIATIVAS

$$(A \cup A) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3.- LEYES CONMUTATIVAS

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

4.- LEYES DISTRIBUTIVAS

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

5.- LEYES DE IDENTIDAD

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

6.- LEYES DE COMPLEMENTO

$$A \cup \bar{A} = U$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$(\bar{A}) = A$$

$$\bar{U} = \emptyset, \emptyset = U$$

7.- LEYES DE MORGAN

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

5. TIPOS FUNDAMENTALES DE CONJUNTOS

1.- conjunto universal

es el conjunto formado por la totalidad de los elementos considerados para una determinada operación. se representa por u .

ejemplo: el conjunto de números de dígitos: $u = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

2.- conjunto vacío

conjunto que no tiene elementos, al cual también se le llama conjunto nulo. se representa por $\{\emptyset\}$.

3.- conjuntos equivalentes

son aquellos que poseen la misma cardinalidad u orden, aunque sus elementos sean diferentes.

4.- conjuntos iguales

dos conjuntos son iguales, si son equivalentes y además, los elementos de uno son también los elementos del otro.

5.- subconjunto

dados dos conjuntos a y b en que todos los elementos de a pertenecen al conjunto b , entonces decimos que el conjunto a es subconjunto de b .

6.- subconjunto propio

dados dos conjuntos a y b decimos que a es subconjunto propio de b , si a es subconjunto de b y existe a lo menos un elemento de b que no pertenece al conjunto a .

7.- conjunto complemento

sea u el conjunto universal y s un subconjunto cualquiera de u . el conjunto de los elementos que faltan a s para completar u , es el "complemento de s ", (s) .

8.- conjuntos disjuntos

a 2 conjuntos a y b se les denomina "disjuntos" si no tienen elemento en común, es decir $a \cap b = \emptyset$

9.- conjuntos finitos

son aquellos conjuntos, en los cuales sus elementos terminan de enumerarse completamente, no obstante la dificultad que pueda presentarse.

10.- conjunto infinito

es aquel en que no es posible de enumerar a el total de sus elementos, por ejemplo los números, el tiempo.



6. OPERACIONES CON CONJUNTOS

Ejemplo 1.- sea la proposición abierta:

$$a = \{x \mid x \text{ es un entero y } 10 < x < 14\}$$

a la respuesta de la proposición abierta se le conoce como conjunto de reemplazamiento, y a consiste en los números mayores a 10 pero menores a 14, luego entonces:

$$a = \{11, 12, 13\}$$

Ejemplo 2.- dados los conjuntos, hallar $A \cap B$

$$a = \{x \mid x^2 + x - 12 = 0\}, \quad b = \{x \mid 2x - 6 = 0\}$$

los elementos de a son las raíces de la ecuación cuadrática:

$$x^2 + x - 12 = 0,$$

factorizando:

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = 3$$

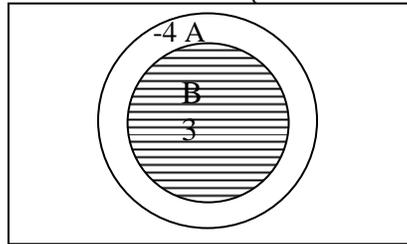
para el conjunto b:

$$2x - 6 = 0, \text{ despejando } x,$$

$$x = 6/2 \quad \underline{x = 3}$$

el termino que se repite en ambos conjuntos es 3, por lo tanto:

$$A \cap B = \{3\}$$



Ejemplo 3.-

Sea el conjunto $u = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ como el conjunto universo y:

$$a = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$c = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$b = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$d = \{7, 8, 9, 10\}$$

determinar los conjuntos que se indican y representar la operación gráficamente, sombreando el resultado.

(A) $A \cup C$

(E) $A \cup \bar{B}$

(I) $\overline{C \cup D}$

(B) $D \cup C$

(F) $B \cup \emptyset$

(J) $C \cup (A \cap D)$

(C) $B \cap C$

(G) $\overline{C \cap D}$

(K) $(B \cap D) \cup (B \cap C)$

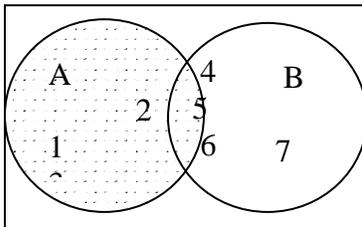
(D) $A \cap D$

(H) $A \cap B$

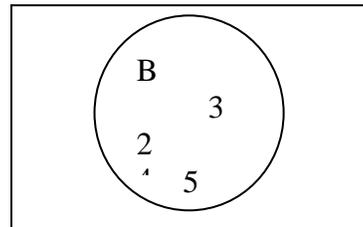
(L) $(C \cup D) \cap (A \cup B)$

SOLUCIÓN

(A) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

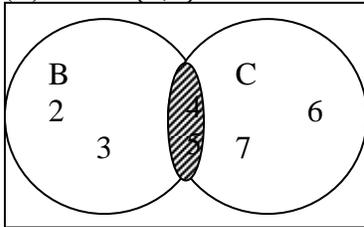


(F) $B \cup \emptyset = \{B\}$



(B) $D \cup B = \{\emptyset\}$

(C) $B \cap C = \{4, 5\}$

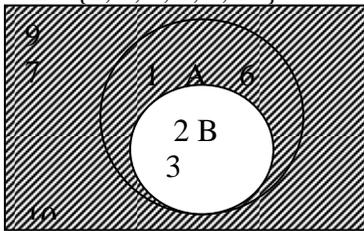


(D) $A \cap D = \{\emptyset\}$

(E) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\overline{B} = \{\text{ELEMENTOS DE U EXCEPTO B}\}$

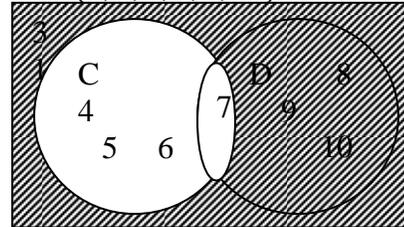
$\overline{B} = \{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$



(G) $C \cap D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\overline{C} = \{\text{ELEMENTOS DE U EXCEPTO LOS DE C}\}$

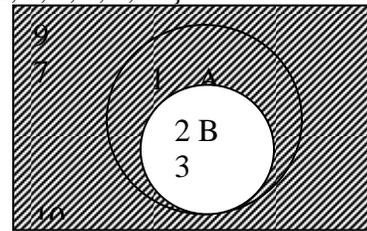
$C = \{1, 2, 3, 8, 9, 10\}$



(H) $\overline{A \cap B} = \{\text{ELEMENTOS DE U EXCEPTO } A \cap B\}$

$\overline{A \cap B} = \{2, 3, 4, 5\}$

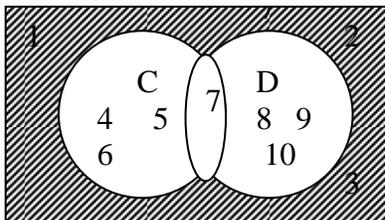
$A \cap B = \{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$



(i) $\overline{C \cup D} = \{\text{ELEMENTOS DE U, EXCEPTO } C \cup D\}$

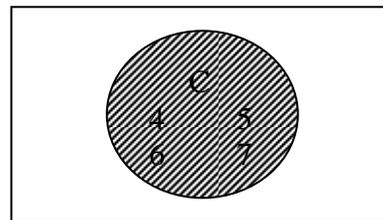
$C \cup D = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\overline{C \cup D} = \{1, 2, 3\}$



(j) $U(A \cap D) = \{C\}$

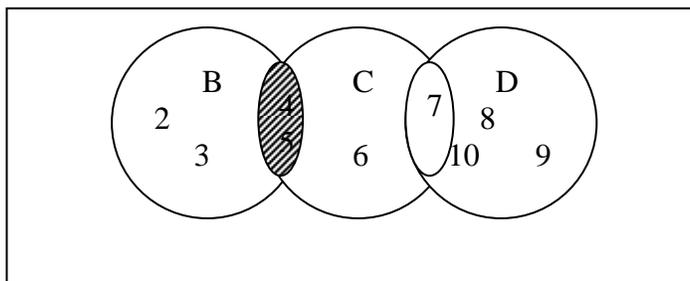
$A \cap D = \{\emptyset\}$



(k) $(B \cap D) \cup (B \cap C) = \{4, 5\}$

$B \cap D = \{\emptyset\}$

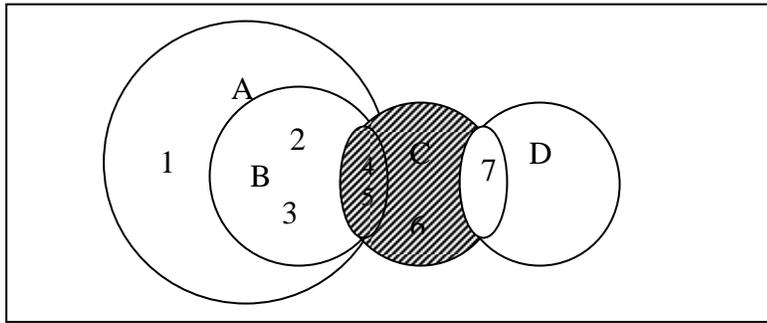
$B \cap C = \{4, 5\}$



(l) $(C \cup D) \cap (A \cup B) = \{4, 5, 6\}$

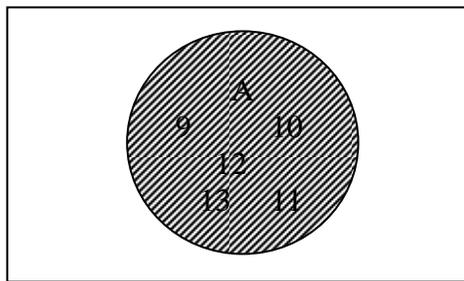
$C \cup D = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Ejemplo 4.- enumerar los elementos del conjunto siguiente y representarlo gráficamente.
 $a = \{x | x \text{ es un entero y } 9 \leq x \leq 13\}$

$$a = \{9, 10, 11, 12, 13\}$$



Ejemplo 15. dados los conjuntos: $A = \{x | x^2 - 7x + 8 = 0\}$, $B = \{x | 2x - 16 = 0\}$
 Hallar $A \cap B$, y representarlo gráficamente.

Simplificando: $x^2 - 7x + 8 = 0$,

$$2x - 16 = 0$$

Factorizando: $(x - 8)(x + 1) = 0$

$$2x = 16 \quad x = 16/2$$

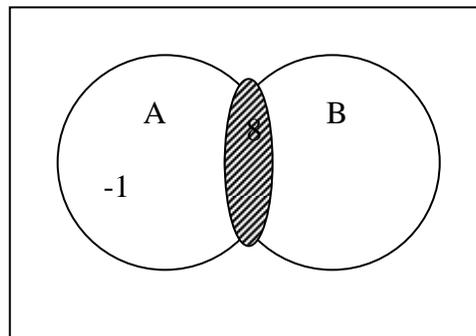
$$X_1 = 8 \quad X_2 = -1$$

$$x = 8$$

Luego entonces: $A = \{8, -1\}$

$$B = \{8\}$$

$$A \cap B = \{8\}$$



Ejemplo 6. dados los conjuntos: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$C = \{1, 2, 4, 8\}$$

Verificar las siguientes propiedades del algebra de eventos,

(a) cerradura. $(A \cup B) \subset U$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}, \text{ se comprueba } (A \cup B) \subset U$$



- (b) asociativa $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ $A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
 Comprobación $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
- (c) conmutativa $A \cup B = B \cup A$
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
 Comprobación $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
- (d) existencial de neutro $A \cup \emptyset = A$
 $A \cup \emptyset = \{1, 2, 3\}$ $A = \{1, 2, 3\}$, comprobación: $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
- (e) existencial de complemento: $A \cup \bar{A} = U$
 $A = \{1, 2, 3\}$ $\bar{A} = \{\text{elementos de } U, \text{ excepto los de } A\}$ $\bar{A} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $A \cup \bar{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 comprobación: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- (f) distributiva $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 4, 8\}$ $A \cap C = \{1, 2\}$ $B \cap C = \{2, 4, 8\}$
 Comprobación: $\{1, 2, 4, 8\} = \{1, 2, 4, 8\}$

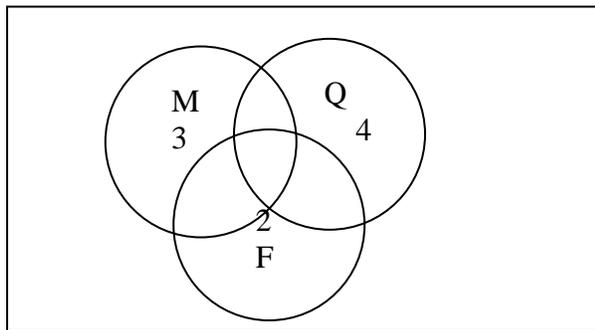
Ejemplo 7. ¿Cuáles de los conjuntos siguientes son finitos?

- (a) los meses del año
- (b) $\{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$
- (c) El numero de personas que viven en la tierra
- (D) El conjunto Q de los números racionales
- (E) El conjunto R de los números reales

SOLUCION. Los 3 primeros conjuntos son finitos

de 30 estudiantes seleccionados en el cecyte plantel Tijuana de la asignatura de tópicos de actualización de sexto semestre, 20 obtuvieron 10 en matemáticas, 23 obtuvieron 10 en química, 18 en física; 15 en matemáticas y química, 12 en matemáticas y física y 14 en química y física. no hubo ninguno sin un 10. ¿cuanto0s de ellos tuvieron un 10 en las tres asignaturas?

- M = 20
- Q = 23
- F = 18
- $M \cap Q = 15$
- $M \cap F = 12$
- $Q \cap F = 14$
- $M \cap Q \cap F = ?$



$$m \cup q \cup f = m + q + f - m \cap q - q \cap f + m \cap q \cap f$$

$$30 = 20 + 23 + 18 - 15 - 12 - 14 + x$$

$$30 = 20 + x, \text{ despejando } x = 30 - 20 \quad x = 10$$

luego entonces: $m \cap q \cap f = 10$ alumnos obtuvieron 10 en las tres asignaturas.

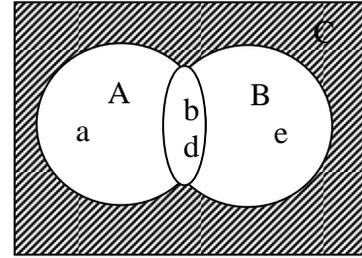
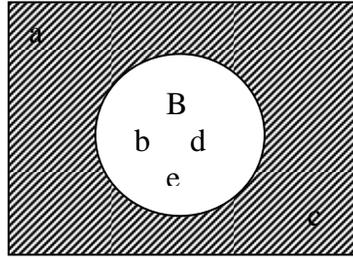
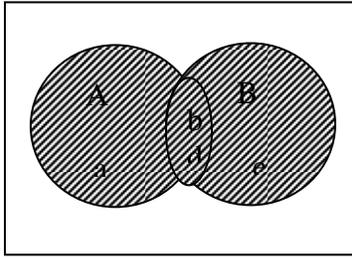
EJEMPLO 9.- SEA $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, d\}$ Y $B = \{b, d, e\}$, HALLAR:

- | | | | | |
|----------------|---------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|
| (A) $A \cup B$ | (C) \bar{B} | (E) $\bar{A} \cap \bar{B}$ | (G) $\bar{A} \cap \bar{B}$ | (I) $\overline{A \cap B}$ |
| (B) $B \cap A$ | (D) $B - A$ | (F) $A \cup \bar{B}$ | (H) $\bar{B} - \bar{A}$ | (J) $A \cup B$ |

(A) $A \cup B = \{a, b, d, e\}$

(C) $B = \{a, c\}$

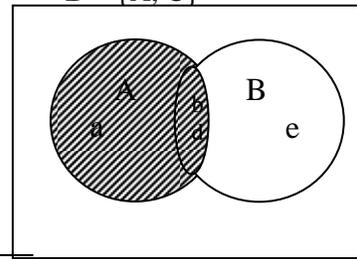
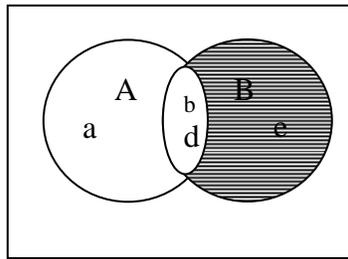
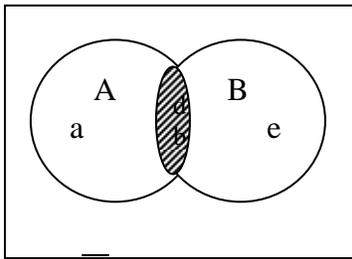
(E) $\bar{A} \cap \bar{B} = \{e\}$
 $\bar{A} = \{c, e\}$



(B) $B \cap A = \{B, D\}$

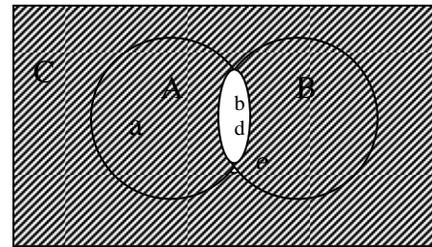
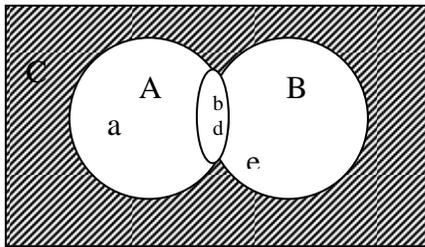
(D) $B - A = \{E\}$

(F) $A \cup B = \{A, B, C, D\}$
 $B = \{A, C\}$



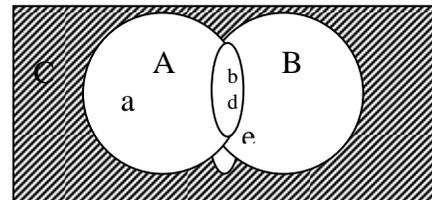
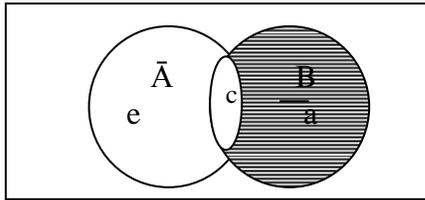
(g) $A \cap \bar{B} = \{c\}$
 $\bar{A} = \{c \text{ y } e\}$ $B = \{a, c\}$

(i) $A \cap B = \{a, c, e\}$
 $A \cap \bar{B} = \{bd\}$



(h) $\bar{B} - \bar{A} = \{a\}$
 $B = \{a, c\}$ $\bar{A} = \{c, e\}$

(j) $\overline{A \cup B} = \{c\}$
 $A \cup B = \{a, b, d, e\}$



Ejemplo 10. La empresa investigadora de mercado “FOCUS” fue contratada para determinar que proporción de una población de 1000 personas preferían tequila (t), brandy (b) o whiskey (w) y arrojó los siguientes datos:

729 – tequila

814 – brandy

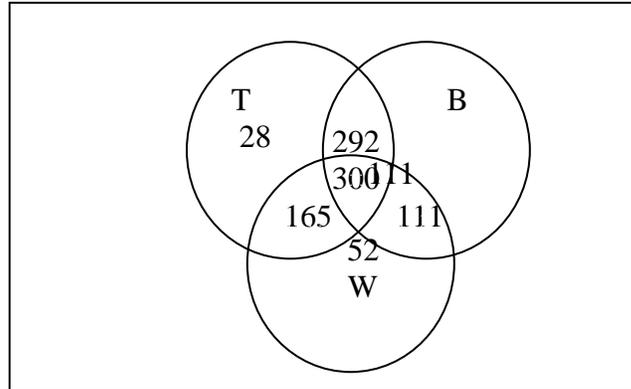
628 – whiskey

592 tequila o whiskey

465 – tequila y whiskey

411 – brandy y whiskey

300 – gustan los tres



CONCLUSION: no es verídica por que toman más tequila de los que son

7. TÉCNICAS DE CONTEO

PRINCIPIO ADITIVO

Para dos operaciones mutuamente excluyentes en donde la primera operación puede hacerse de m formas y la segunda operación de n formas. entonces una o la otra pueden hacerse de:

$$M + N \text{ FORMAS}$$

PRINCIPIO MULTIPLICATIVO

Si un experimento se realiza en r pasos y si el primer paso se realiza en n_1 formas, el segundo de n_2 , el tercero de n_3 , y así sucesivamente hasta n_r , entonces el experimento se puede llevar a cabo de:

$$N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot \dots \cdot N_r \text{ FORMAS}$$

NOTACION FACTORIAL

El producto de los enteros positivos desde 1 hasta n incluso, se emplea con mucha frecuencia en matemáticas y aquí lo representaremos por el símbolo especial que es $n!$, el cual se lee "numero factorial de".

PERMUTACIONES

Una permutación es todo arreglo de números posibles en un experimento, en los que importa el orden, matemáticamente se expresa:

$$nPx = \frac{n!}{(n - x)!}$$



COMBINACIONES

Una combinación es todo arreglo de numero posibles en un experimento en los que no importa el orden, matemáticamente se expresa:

$$nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Ejemplo 1.- hallar el valor de la notación factorial

(A) 4!

(B) 6!

(C) 2!

(A) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

(B) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

(C) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

(D) $9! = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

POR DEFINICION: $0! = 1$

Ejemplo 2. calcular ${}_8P_5$

$${}_8P_5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{5!}} = 336$$

PERMUTACIONES CON REPETICIONES

Con frecuencia se desea saber el numero de permutaciones de objetos, de los cuales algunos son iguales. El numero de permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales, ... n_r son iguales es:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

Ejemplo 3. calcular ${}_{14}C_{11}$

$${}_{14}C_{11} = \frac{14!}{1! \cdot (14-11)!} = \frac{14!}{1! \cdot 3!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 364$$

Ejemplo 4. ¿ de cuantas maneras se puede acomodar una reunión de 9 personas?

(a) en una fila de 9 sillas

(b) alrededor de una mesa redonda

(a) las nueve personas pueden distribuirse en una fila de $9! = 362\ 880$



- (b) una persona puede sentarse en cualquier parte de la mesa redonda, las otras 8 pueden acomodarse en $8! = 40\,320$ formas diferentes

Ejemplo 5. ¿Cuántas permutaciones distintas pueden formarse con todas las letras de cada una de las palabras?

- (a) rara
 (b) asadas
 (c) Mississippi

$$(a) n=4 \quad r=2 \quad a=2 \quad {}_4P_{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

$$(b) n=6 \quad a=3 \quad s=2 \quad d=1 \quad {}_6P_{3,2,1} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{720}{6 \cdot 2 \cdot 1} = 60$$

$$(c) n=11 \quad s=4 \quad i=4 \quad p=2 \quad m=1 \quad {}_{11}P_{4,4,2,1} = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{39\,916\,800}{(24)(24)(2)(1)} = 34650$$

Ejemplo 6.- ¿de cuantas maneras pueden sentarse 5 personas en un sofa de tres plazas?

$$n = 5 \quad X = 3 \quad {}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60 \text{ MANERAS}$$

Ejemplo 7.- los teléfonos de la ciudad de Mexicali cuentan con siete dígitos; el primero puede ser 5, 8 y 9; el segundo dígito puede ser 5, 6, 7, 8 y 9; mientras el tercer dígito puede ser del 2 al 9. los dígitos restantes pueden ser del 0 al 9. hallar el total de líneas telefónicas que pueden existir en Mexicali . aplicando el principio multiplicativo:

1 DIGITO	2 DIGITO	3 DIGITO	4 DIGITO	5 DIGITO	6 DIGITO	7 DIGITO
(3)	(5)	(8)	(10)	(10)	(10)	(10)

$$\text{TOTAL DE LINEAS TELEFONICAS} = (3)(5)(8)(10)^4 = 1'200,000$$

Ejemplo 8.- hallar el numero de placas para automóvil para el estado de baja California si cada placa consta de tres letras diferentes seguidas de 4 dígitos diferentes. la segunda letra debe ser exclusivamente a, b, c, d o e.

el tercer dígito puede ser solo del 0 al 3; el cuarto dígito puede ser del 0 al 2.

finalmente la tercer letra puede ser de la a a la f.

el alfabeto tiene 26 letras:

PRIMER LETRA (l)	SEGUNDA l	TERCER l	PRIMER DIGITO (d)	SEGUNDO d	TERCER d	CUARTO d
(26)	(5)	(6)	(10)	(10)	(4)	(3)

$$\text{TOTAL DE PLACAS EN BC} = 936,000 \text{ JUEGOS DE PLACAS PARA AUTOMOVIL}$$



Ejemplo 9.- Determinar el numero de combinaciones de las 4 letras a, b, c, d tomadas de tres en tres.

COMBINACIONES

- ABC
- ABD
- ACD
- BCD

PERMUTACIONES

- ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
- ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA
- ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA
- BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB

COMPROBACION:

$$4C3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{24}{(6)(1)} = 4 \text{ COMBINACIONES}$$

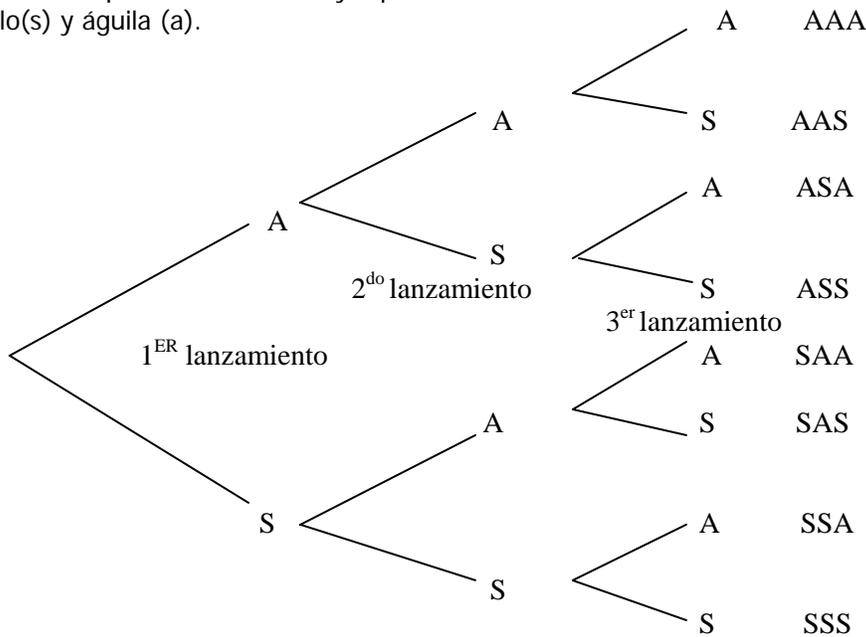
$$4P3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{24}{1} = 24 \text{ PERMUTACIONES}$$

DIAGRAMAS DE ARBOL

Un diagrama de árbol es el dibujo que se usa para enumerare todos los resultados posibles de una serie de experimentos en donde cada experimento puede en un numero finito de maneras.

Ejemplo 11. construir un diagrama de árbol de los resultados posibles en un lanzamiento de una moneda honrada en tres ocasiones.

Existen dos posibles resultados ya que una moneda tiene dos lados: Sello(s) y águila (a).



Ejemplo 12. Si las 5 finalistas del concurso miss universo en el Convention Center de las vegas en 1991 fueron: miss Canada, miss Holanda, miss Rusia, miss Finlandia y miss México, dibujar un diagrama de árbol que muestre las varias formas en que los jueces pueden elegir a la ganadora y a la ocupante del segundo lugar.

ANEXO. En este concurso la ganadora fue la representante de México, la cachanilla Lupita Jones Garay de Mexicali; hasta la fecha México no ha vuelto a ganr un concurso miss universo, y por el momento Lupita Jones ha sido la única mexicana en ganar este centro.

NOTA: se deja al lector la respuesta correcta con su respectivo diagrama de arbol.



8. INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

Probabilidad es el estudio de experimentos aleatorios o libres de determinación. históricamente, la teoría de la probabilidad comenzó con el estudio de los juegos de azar tales como la ruleta y las cartas. la probabilidad "p" de un evento "a": si "a" puede ocurrir de 5 maneras entre un total de igualmente posibles, entonces:

$$P(A) = \frac{5}{h}$$

ESPACIO MUESTRAL:

el conjunto S de todos los resultados posibles de un experimento dado se llama espacio muestral o espacio muestra. un elemento de S, se llama punto muestral o muestra.

EVENTO:

Un evento "a" es un conjunto de resultados o, en otras palabras, un subconjunto del espacio muestral S. el evento {a} que consta de una muestra simple $a \in S$ se le llama evento elemental.

para asignar probabilidades de los diversos puntos muestrales, las estadísticas han convenido en dos reglas.

- 1.- la probabilidad de cada muestra punto muestral debe estar entre 0 y 1.
- 2.- la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales debe ser igual a 1.

9. REGLAS DE LA PROBABILIDAD

1.- Regla de la adición.

la regla de la adición expresa que la probabilidad de que ocurran a o b o ambos es igual a la probabilidad de "a" mas la probabilidad de "b" menos la probabilidad de que ocurran ambos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ejemplo 13.- Se lanza un dado no cargado. usted gana 50 pesos si el resultado es par o divisible por 3. ¿cual es su probabilidad de ganar?

A={RESULTADO PAR}

B={RESULTADO DIVISIBLE POR 3}

U={1, 2, 3, 4, 5, 6}

A={2, 4, 6}

B={3, 6}

$A \cap B = \{6\}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = 1/3 + 1/2 - 1/6 \quad P(A \cup B) = 2/3$$

Ejemplo 14.- La probabilidad de que llueva el 12 de octubre en ensenada es de 0.10; de que truene es 0.05 y de que llueva y truene es de 0.03.

¿Cual es la probabilidad de que llueva o truene en ese día?

$$P(LLUEVE \cup TRUENA) = 0.10 + 0.05 - 0.03$$

$$P(LLUT) = 0.12$$

Ejemplo 15.- Se lanzan dos dados honrados, hallar:

(A) el espacio muestra

(B) los elementos cuya suma de puntos sea 9



(C) los elementos cuya suma de puntos sea 4 o 5

(A) $S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$

(B) LA SUMA SEA 9 = $\{ (3,6), (4,5), (5,4), (6,3) \}$

(C) LA SUMA SEA 4 O 5 = $\{ (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1) \}$

10. PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Escribir los elementos del conjunto de los nombres de los días de la semana.

2.- Escribir los elementos del conjunto de los meses del año.

3.- Escribir los elementos del conjunto de los números dígitos.

4.- Anotar los elementos del conjunto de tu familia.

5.- Anotar una frase que describa al conjunto: {México, EEUU, Canadá}.

6.- Escribe la descripción del conjunto anterior;

$m = \{x \mid x \text{ es un equipo de fútbol de primera fuerza de la ciudad De México}\}$.

7.- Hallar los siguientes conjuntos de acuerdo a:

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$C = \{2, 3, 5, 7\}$

$D = \{0, 3, 6, 9\}$

HALLAR:

(A) $A \cup B$

(D) $(A \cup B) \cap C$

(B) $A \cup C$

(E) $A \cap (B \cup C)$

(C) $B \cup C$

Problema 8.- Sea $m = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ como el conjunto universal, hallar los conjuntos:

(A) $E = \{X \in M \mid X \text{ ES MENOR QUE } 5\}$

(B) $Z = \{X \in M \mid X + 1 \text{ ES IGUAL A } 5\}$

(C) $L = \{X \in M \mid X \text{ ES MAYOR QUE } 4\}$

(D) $N = \{X \in M \mid X \text{ ES DIFERENTE DE } 2\}$

Problema 9.- Sea el conjunto universo $u = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y subconjuntos:

$h = \{1, 2, 3, 4\}$ $j = \{3, 4, 5\}$ $k = \{7, 8, 9\}$ $l = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Hallar los siguientes conjuntos y dibujar su diagrama de venn, sombreando el resultado.

(A) \overline{H}

(F) $H \cap J$

(K) $\overline{H \cup J}$

(P) $(H \cap J) \cap K$



- | | | | |
|----------------|----------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| (B) \bar{L} | (G) $K \cap L$ | (L) $\overline{H \cap K}$ | (Q) $H \cap (J \vee K)$ |
| (C) $H \cup J$ | (H) $\underline{J \cap K}$ | (M) $\underline{H \cap K}$ | (R) $(J \vee K) \cap L$ |
| (D) $H \vee K$ | (I) $\underline{H \cap J}$ | (N) $H \cup \emptyset$ | (S) $(H \cap J) \cap L$ |
| (E) $K \cup L$ | (J) $\underline{H \cap J}$ | (O) $\underline{H \cup \emptyset}$ | (T) $(H \cup K) \cap (J \vee K)$ |

Problema 10.- Se arrojan un par de dados legales, ¿cuales son las probabilidades de obtener?

- | | |
|------------|----------------|
| (A) 7 | (D) 3 |
| (B) 11 | (E) 2 O 12 |
| (C) 7 U 11 | (F) 2, 3, O 12 |

Problema 11.- En el proyecto "lotería de Baja California" los billetes de lotería están numerados del 00001 al 50000 ¿cual es la probabilidad de comprar un billete al azar y que el numero resulte divisible entre 200?

Problema 12.- sean $u = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $a = \{a, b, c, d, e\}$, $b = \{a, c, e, g\}$, $c = \{b, e, f, g\}$, hallar los conjuntos:

- | | | | |
|----------------|-------------------------|---------------------------|--------------------------|
| (A) $A \cup C$ | (C) $\underline{C - B}$ | (E) $\overline{C \cap A}$ | (G) $\overline{(A - B)}$ |
| (B) $B \cap A$ | (D) $B \cup C$ | (F) $(A - C)$ | (H) $(A \cap \bar{A})$ |

Problema 13.- Sea $a = \{x|x \text{ es un entero impar}\}$, $b = \{x|x^2 - 8x + 15 = 0\}$, demostrar que $b \subset a$.

Problema 14.- Sea $c = \{x|x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $b = \{x|x^2 = 16\}$, determinar si $a \subset b$ o no.

15. Si el universo $U = \{2, 0, \pi, 6, -\sqrt{8}, -3\}$ y los subconjuntos de U , son:

$A = \{-\sqrt{8}, \pi, 0\}$, $B = \{6, 2, -\sqrt{8}, 3\}$ $C = \{2, -3\}$, encontrar:

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| (A) $A \cap B$ | (E) $A - B$ |
| (B) $A \cup B$ | (F) $B \cap \bar{C}$ |
| (C) $\underline{(A \cup B) \cap C}$ | (G) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ |
| (D) $B \cup C$ | |

Además representar gráficamente cada conjunto por diagramas de venn sombreando el resultado

16. calcular:

- | | | | |
|---------------|---------------|------------------|---------------|
| (a) ${}_3P_4$ | (b) ${}_7P_5$ | (c) ${}_{16}P_2$ | (d) ${}_3P_3$ |
|---------------|---------------|------------------|---------------|

17. ¿De cuantas maneras diferentes pueden ordenarse 8 bolas de billar en una fila?

18. Se quieren sentar 7 hombres y 6 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los sitios pares. ¿de cuantas formas pueden sentarse?

19. El profesor Miguel Antonio Piña Valdez del cecyte Tijuana fue comisionado a un curso y tiene que viajar de Tijuana a México. Si existen las líneas de autobuses elite, TAP, estrella blanca, pacifico y azteca; y para aprovechar un descuento tiene que viajar de regreso en la misma línea.

¿y de cuantas sino debe regresarse a Tijuana en la misma linea?

20. De cuantas formas diferentes pueden arreglarse 3 focos rojos, 4 amarillos y 2 azules en una serie navideña que contiene 9 porta focos

21. ¿Cuántas permutaciones distintas pueden formarse con todas las letras de cada una de las siguientes palabras?

- (a) campana
- (b) ana
- (c) estadística
- (d) parangacutirimicuaro
- (e) xochimilco

22. Cuatro libros diferentes de matemáticas, 6 de física y 2 de química han de ser colocados en un estante. ¿Cuántas colocaciones distintas admiten si?

- (a) los libros de cada materia han de estar juntos
- (b) solo los de matemáticas tienen que estar juntos

23. Calcular las siguientes combinaciones:

- (a) $6C4$ o $6/4$
- (b) $7/3$
- (c) $13/3$
- (d) $7/5$
- (e) $21/18$

24. Calcular: $19/16$

25. ¿De cuantas maneras puede elegirse la asociación de profesores del cecyte en Baja California si deberá estar compuesta de 3 hombres y 2 mujeres si los aspirantes son 7 hombres y 6 mujeres?

26. ¿De cuantas maneras pueden seleccionarse un cuestionario para el ganador del ultimo debate de los candidatos a la presidencia de México, si debe contener 7 preguntas de un total de 13?

27. Un muestreo de 300 electores en Mexicali revela la siguiente información referente a los candidatos Jaime Díaz del pan, Guillermo Aldrete del PRI y Jaime "el compa" veloz del PRD que se disputan la senaduría en la segunda posición:

- 28 a favor de pan y PRI pero no PRD
- 98 a favor de pan y PRI pero no PRD
- 42 a favor de PRI pero no pan y PRD
- 122 a favor de PRI o PRD pero no pan
- 64 a favor de PRD pero no pan y PRI
- 14 a favor de pan y PRD pero no del PRI

Cuantos electores están a favor de:

- (a) los tres candidatos
- (b) del pan e indiferentes al PRI y PRD
- (c) del PRI e indiferentes de pan y PRD
- (D) del PRD e indiferentes a pan y PRI
- (E) del pan y PRI pero no del PRD
- (F) solo de uno de los candidatos

28. ¿De cuantas diferentes maneras pueden elegirse 5 de 19 laboratoristas debido a la expansión del laboratorio 2el virus loco”?

29. Los números de teléfonos de ciudad Juárez están formados por siete dígitos. El primer dígito es 1; el segundo puede ser 2, 5 y 8; el tercero puede ser 4, 5, 6,7 y 8; el cuarto puede ser 4, 5, 6, 7 y 8, hallar:

- (a) cuantos números diferentes de teléfonos podrán haber en ciudad Juárez
- (b) anotar los 10 primeros números menores
- (c) anotar los 10 últimos números mayores

30. Se va a conformar un sindicato democrático en cecyltebc compuesto de tres miembros compuestos por un representante de los docentes, uno de administrativos y uno e intendencia. Si hay 3 candidatos de los docentes, 3 de administrativos y 2 de intendencia, determinar cuantos comités diferentes pueden conformarse, empleando:

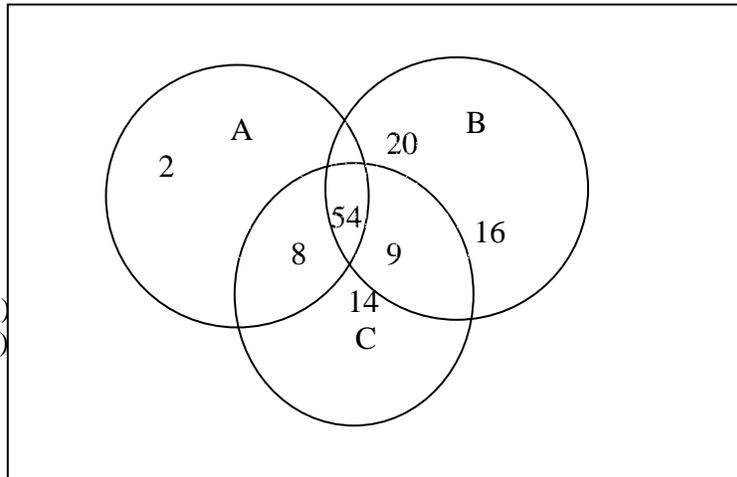
- (a) el principio multiplicativo
- (b) por diagrama de árbol

31. Un jugador en el casino “barbary coast” de las vegas prueba suerte en la ruleta 5 veces. Gana o pierde un dólar en cada juego. El hombre empieza con 2 dólares y dejara de jugar a la quinta vez si pierde todo su dinero, o si gana 3 dólares (esto es, complete 5 dólares). Hallar el numero de maneras como puede suceder el juego.

32. Un supervisor de obra debe revisar la instalación eléctrica de un nuevo edificio de departamentos, el lunes, martes, miércoles o jueves a las 8:00 a.m., 1:00 a.m. o 2:00 p.m. dibujar un diagrama de árbol que muestre las varias formas en que puede ocurrir la inspección de la instalación eléctrica del nuevo edificio de departamentos.

33. En una encuesta a 150 estudiantes del Cecylte XOCHIMILCO respecto al proyecto de transporte urbano, algunos afirmaron vivir mas de 3 Km. del plantel (a) a otros sus padres los traen en vehículo propio (b) y otro grupo cambiaria al transporte colectivo si lo hubiera (c). Esto de acuerdo al diagrama de venn

Hallar:



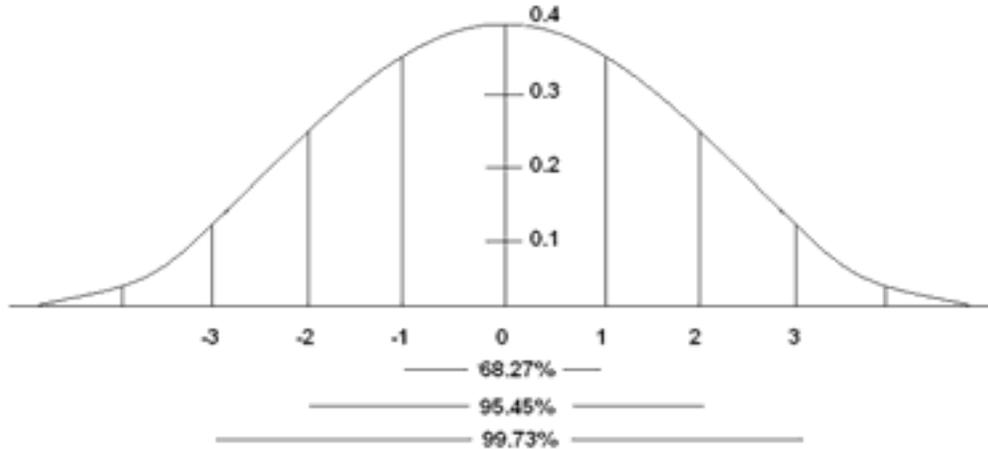
- (a) $N(A)$
- (b) $N(B)$
- (c) $N(C)$
- (d) $N(A \cap B)$
- (e) $N(A \cap C)$

- (f) $N(A \cap B \cap C)$
- (g) $N(A \cup B)$
- (h) $N(B \cup C)$
- (i) $N(\overline{A \cup B \cup C})$
- (j) $N\{B \cap (A \cup C)\}$

34. De un total de 160 egresados del cecyte "el pacífico", 92 han sido becados para un estudio avanzado de estadística, 63 para un curso de investigación de operaciones y 40 están becados en ambos cursos ¿Cuántos están inscritos en uno de los dos cursos?
35. Las posibilidades de que el canal 66 de Mexicali reciba 0, 1, 2, 3, ..., 8 o al menos 9 quejas después de emitir el programa "con sentido" de Antonio magaña son respectivamente, 0.01, 0.03, 0.07, 0.15, 0.19, 0.18, 0.14, 0.12, 0.09, y 0.02.
Cuáles son las probabilidades de que después de proyectar tal programa, el canal 66 reciba:
- (a) a lo sumo 4 quejas
 - (b) al menos 6 quejas
 - (c) de 5 a 8 quejas
36. La probabilidad de que betty, secretaria del cecyte xochimilco reciba a lo mas 5 llamadas telefónicas en un día es de 0.20; y por lo menos 9 llamadas telefónicas en un día es de 0.50.
¿Cuál es la probabilidad que betty reciba 6, 7 u 8 llamadas en un día?
37. De 120 estudiantes de cibola high school de yuma, 60 estudian frances, 50 estudian español y 20 estudian frances y español. Si se elige un estudiante al azar, hallar la probabilidad de que el estudiante:
- (a) estudie frances y español
 - (b) no estudie frances ni español
38. Un grupo de estudiantes consta de 10 hombres y 20 mujeres de los cuales la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen los ojos castaños. Hallar la probabilidad de que una persona elegida al azar sea un hombre o tenga los ojos castaños.
39. Tres estudiantes del cecyte, cobach y conalep intervienen en una prueba de natación. Por competencias anteriores el del cecyte y cobach tienen la misma probabilidad de ganar y el doble que el competidor del conalep. Hallar la probabilidad que gane el del cobach o el del conalep.
40. Los números de teléfonos de Tijuana tienen siete dígitos; el primer dígito es 6 7 0 9; el segundo puede ser 2, 3, 4, 0, 8. El tercero es 0, 1, 2, 3, 4, 7, 8 y del cuarto al séptimo ha 10 dígitos. Hallar el total de líneas telefónicas que pueden existir en Tijuana

UNIDAD 5

PROBABILIDAD DE EVENTOS SUCESIVOS

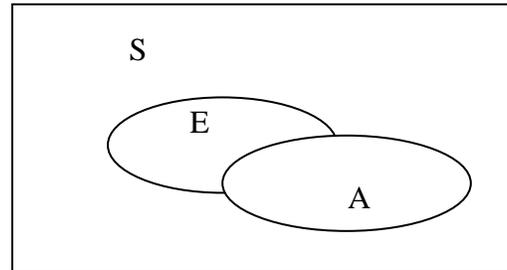


PROBABILIDAD PARA EVENTOS SUCESIVOS

1. PROBABILIDAD CONDICIONAL

Sea E un evento maestro arbitrario de un espacio maestro S con $P(E) > 0$. La probabilidad de que un evento A suceda una vez que E haya sucedido, se define como:

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$



$$P(A/E) = \frac{\text{TOTAL DE MANERAS DE } A \cap E}{\text{TOTAL DE MANERAS DE E}}$$

Ejemplo 1. Se lanzan un par de dados honestos. Si la suma es 6, hallar la probabilidad de que uno de los dados sea 2.

- E= {suma = 6} A= {dado = 2}
- E= {(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)}
- $A \cap E = \{(4, 2), (2, 4)\}$

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}$$

Ejemplo 2. Se extrae al azar una bola de una caja que contiene 6 bolas rojas, 4 blancas y 5 azules. Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea:

- (a) roja (R)
- (b) blanca (B)
- (c) azul (A)
- (d) no roja (R)
- (e) roja o blanca (R + B)



$$(a) P(R) = \frac{\text{formas de elegir bola roja}}{\text{Formas totales de elegir una bola}} = \frac{6}{6 + 4 + 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$(b) P(B) = \frac{4}{6 + 4 + 5} = \frac{4}{15}$$

$$(c) P(A) = \frac{5}{6 + 4 + 5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$(d) P(\bar{R}) = S - P(R) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$(e) P(R + B) = \frac{6 + 4}{6 + 4 + 5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 3. De una baraja de 52 Naipes, mezclados al azar, se extraen dos cartas. Hallar la probabilidad de que ambos sean ases si la primera extraída:

(a) Se devuelve a la baraja

(b) Si no se devuelve.

E_1 = " as " primera extracción

E_2 = " as " segunda extracción

(a) si se repone E_1 y E_2 son sucesos independientes:

$$P(E_1) P(E_2) = (4/52) (4/52) = \frac{1}{69}$$

(b) Si no existe reposición, el primer naipe se saca de 52 y el segundo de entre 51, luego ambas pueden sacarse de 52×51 formas. Hay 4 casos favorables para E_1 y 3 para E_2 , o sea E_1 y E_2 pueden ocurrir de 4×3 formas:

$$P = (E_1 E_2) = \frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51} = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221}$$

2. REGLA DE MULTIPLICACION

Partiendo de la definición de Probabilidad Condicional:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Y multiplicamos ambos miembros por $P(A)$, obtenemos la ecuación:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

A la cual se denomina " Regla de Multiplicación ". La regla de la multiplicación expresa que la probabilidad de que ocurran A y B es igual a la probabilidad de A multiplicada por la probabilidad de que ocurra B, dado que A ha ocurrido.

Regla de Multiplicación para sucesos Independientes

Los sucesos A y B se consideran independientes cuando la ocurrencia de una no influye sobre la probabilidad de ocurrencia del otro; esto significa que independientemente de que haya ocurrido o no, la probabilidad asignada a B es siempre la misma. Cuando A y B son independientes la probabilidad



condicional de B con respecto a A es igual a la probabilidad incondicional de B. Matemáticamente se expresa:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo 4. Al cierre de la casilla 361 B en las elecciones de 1995 en Mexicali, los resultados fueron: PAN 204, PRI 149, PRD 46, PFCRN 9, PT 16, PVEM 2, PPBC 1 y votos nulos 34; si el presidente de casilla extrae 6 votos sin restitución:

- (a) Cual es la probabilidad de que tres sean para el PAN, 2 al PRI y 1 PRD
- (b) 4 para el PRD y 2 para el PAN
- (c) todos para el PAN
- (d) todos para el PRI
- (e) 3 para el PRD y 3 para el PT

$$(a) P(PAN \cap PRI \cap PRD) = \left(\frac{204 \cdot 203 \cdot 202 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 46}{461 \cdot 460 \cdot 459 \cdot 458 \cdot 457 \cdot 456} \right) = 0.0009$$

$$(b) P(PRD \cap PAN) = \left(\frac{46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 204 \cdot 203}{461 \cdot 460 \cdot 459 \cdot 458 \cdot 457 \cdot 456} \right) = 0.000017$$

$$(c) P(PRI) = \left(\frac{204 \cdot 203 \cdot 202 \cdot 201 \cdot 200 \cdot 199}{461 \cdot 460 \cdot 459 \cdot 458 \cdot 457 \cdot 456} \right) = 0.0072$$

$$(d) P(PRI) = \left(\frac{149 \cdot 148 \cdot 147 \cdot 146 \cdot 145 \cdot 144}{461 \cdot 460 \cdot 459 \cdot 458 \cdot 457 \cdot 456} \right) = 0.0011$$

$$(e) P(PRD \cap PT) = \left(\frac{149 \cdot 148 \cdot 147 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{461 \cdot 460 \cdot 459 \cdot 458 \cdot 457 \cdot 456} \right) = 0.0000012$$

Ejemplo 5. Si los eventos A y B son independientes y $P(A) = 0.20$ y $P(B) = 0.30$, encontrar:

- (a) $P(A \cap B)$
- (b) $P(A/B)$
- (c) $P(A \cup B)$
- (d) $P(A \cap B)$

$$(a) P(A \cap B) = P(A) P(B) = (0.20)(0.30) = 0.06$$

$$(b) P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.06}{0.30} = 0.20$$

$$(c) P(A \cup B) = P(A) \cup P(B) = (0.20) + (0.30) = 0.50$$

$$(d) P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad P(\bar{A}) = 1 - 0.20 \quad P(\bar{A}) = 0.80$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) \quad P(\bar{B}) = 1 - 0.30 \quad P(\bar{B}) = 0.70$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = (0.8)(0.7) = 0.56$$

Ejemplo 6. Un veterinario dispara 7 balas con somnífero al tigre siberiano "Titán" del show "Siegfried y Roy" de MGM Grand Hotel de Las Vegas. Si la probabilidad de que el somnífero haga efecto en "Titán" es 0.75, ¿cual es la probabilidad de que fracase el sedante y el animal ataque al veterinario.

$$P(V) = 1 - (0.75)^7 \quad P(V) = 1 - 0.1335$$

$$P(V) = 0.8665$$



3. TEOREMA DE BAYES

En su forma algebraica más simple, el teorema de Bayes se refiere al cálculo de la probabilidad condicional del evento A, dado que ha ocurrido el evento B, la forma general del teorema de Bayes es:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

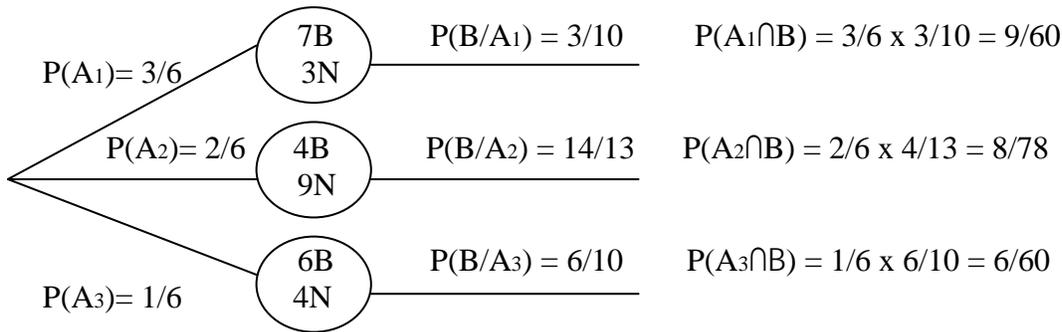
La fórmula anterior es simplemente una forma específica de la fórmula general para la probabilidad condicional; sin embargo, la importancia especial del teorema de Bayes consiste en que se aplica en el contexto de eventos secuenciales y además, en que la versión de cálculo de la fórmula proporciona la base para determinar la probabilidad condicional de un evento que ha ocurrido en la primera posición secuencial, dado que se ha observado un evento específico en la segunda posición secuencial. La forma de cálculo para el teorema específico de Bayes es:

$$P(A/B) = \frac{P(A) P(A/B)}{P(A_1) P(A/B_1) + P(A_2) P(A/B_2) + \dots + P(A_n) P(A/B_n)}$$

Ejemplo 7. La urna A1 contiene 7 bolas blancas y 3 negras; la urna A2 contiene 4 bolas blancas y 9 negras y la urna A3 contiene 6 blancas y 4 negras. Se lanza un dado no cargado. Si resulta 1,2 o 3, se saca una bolita de urna A1; si resulta 4 o 5, la bolita se saca de la urna A2 y finalmente si resulta 6 se saca de la urna A3. Dado que la bolita extraída fue blanca.
¿Cual es la probabilidad de que ella provenga de la urna A2?

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2) P(B/A_2)}{P(A_1) P(B/A_1) + P(A_2) P(B/A_2) + P(A_3) P(B/A_3)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{(2/6) (4/13)}{\frac{3}{6} \frac{8}{10} + \frac{2}{6} \frac{4}{13} + \frac{1}{6} \frac{6}{10}}$$



Ejemplo 8. Tres maquinas A,B y C producen respectivamente 50%, 30% y 20% del número total de refrescos de una fabrica, embotelladora. Los porcentajes de desperfectos de producción de estas maquinas son 4%, 5% y 6%, si se selecciona al azar un articulo, hallar la probabilidad de que el articulo sea defectuoso.

D= Defectuosos ND= No defectuoso

$$P(D) = P(A) P(D/A) + P(B) P(D/B) + P(C) P(D/C)$$

$$P(D) = (0.50) (0.04) + (0.30) (0.05) + (0.20) (0.06)$$

$$P(D) = 0.02 + 0.015 + 0.012$$

$$P(D) = 0.047$$



Ejemplo 9. Si del ejemplo anterior, se selecciona un refresco y es defectuoso, hallar la probabilidad de que el articulo fue producido la maquina A.

$$P(A/X) = \frac{P(A) P(X/A)}{P(A) P(X/A) + P(B) P(X/B) + P(C) P(X/C)}$$

$$P(A/X) = \frac{(0.50)(0.04)}{(0.50)(0.04) + (0.30)(0.05) + (0.20)(0.06)} = \frac{0.02}{0.02 + 0.015 + 0.012}$$

$$P(A/D) = \underline{0.02} \quad P(A/D) = 0.4255 \quad 0.47$$

VARIABLE AL AZAR

Sea S un espacio muestra en el cual esta definida una función de probabilidad. Sea X una función de valores reales definidos a S, que transforma punto de S a punto en el eje X, entonces X es llamada una variable al azar. Existen dos clases de variables al azar:

1. Variable al azar discreta. Si una variable solo tiene un número finito de valores no continuos. El valor que asume $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ con probabilidades $f(X_1), f(X_2), f(X_3), \dots, f(X_n)$ y si E (valor esperado) es cualquier subconjunto de los puntos $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$; entonces la probabilidad del evento E se define como $P(E) = \sum f(X)/E$, en donde $\sum f(X)/E$ es la suma de $f(X)$ sobre aquellos valores de X que están en E. $f(X)$ es la distribución de X, y se le llama función de distribución de probabilidad discreta si satisface las siguientes condiciones: (a) $f(X_i) \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$(b) \sum_{i=1}^N f(X_i) = 1$$

Ejemplo Ilustrativo 1. Sea "x" la variable al azar que describe los resultados de un lanzamiento de un dado honrado, entonces:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 1 \\ 1/6 & \text{para } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{para } x > 6 \end{cases}$$

Ejemplo Ilustrativo 2. Del problema anterior, hallar la probabilidad de que $x \leq 3$.
 $F(x) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 \quad F(x) = 1/2$

1. Variable al azar continúa. Es cuando la variable puede tomar valores únicamente en una escala continua. La variable al azar x es una variable continua al azar, si toma valores en una escala continua y si existe una función $f(x)$ tal que $f(x) > 0$ para toda x en el intervalo $-\infty \leq x < \infty$ de tal manera que la probabilidad de cualquier evento E será $P(E) = P(x \text{ contenido en } E) = \int_E f(x) dx$ = en este caso la probabilidad asociada a un valor de la variable expresada por una integral:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Donde a $f(x)$ se le llama función de distribución de probabilidad y debe de satisfacer las siguientes condiciones:

$$F(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

En este caso la función de distribución de probabilidad acumulada se expresa por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Ejemplo Ilustrativo 3. Sea la función de distribución acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 50 \\ 1/20 & \text{para } 50 \leq x \leq 70 \end{cases}$$



0 para $x > 70$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{50} f(x) dx + \int_{50}^{70} f(x) dx + \int_{70}^{+\infty} f(x) dx = 1/20x \Big|_{50}^{70}$$

$$= 70/20 - 50/20 = 20/20 = 1$$

Ejemplo 9. La probabilidad de que un estudiante apruebe la asignatura de Probabilidad y Estadística es 0.60. Si 15 de 25 alumnos trabajan ocho horas, la probabilidad de que un alumno que trabaje apruebe la asignatura es de 0.40.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno trabaje y apruebe la materia?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe, considerando que no trabaja?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea un estudiante que trabaja, si su examen final se calificó y resultado aprobado?

Sea: $A =$ aprobar $P(A) = 0.60$ $P(A/T) = 0.40$
 $T =$ trabaja $P(T) = 0.60$ $P(A/\bar{T}) = P(A) P(\bar{T})$
 $\bar{T} =$ no trabaja $= (0.60)(0.40) = 0.24$
 $\bar{A} =$ no trabaja

DIAGRAMA DE ÁRBOL:

$$P(T) = 0.60$$

$$P(\bar{T}) = 0.40$$

$$P(A/T) = 0.40$$

$$P(\bar{A}/T) = 0.60$$

$$P(A/\bar{T}) =$$

$$P(\bar{A}/\bar{T}) =$$

Ejemplo 10. Una variable al azar z tiene la siguiente función de distribución de probabilidad.

$$kz^2 \quad 0 \leq z \leq 1$$

$$F(z) = \begin{cases} 1 & 1 \leq z \leq 4/3 \\ 0 & z < 0, \quad z > 4/3 \end{cases}$$

(a) Hallar el valor de k .

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que $0 \leq z \leq 1$

$$(a) \int_0^1 kz^2 dz + \int_1^{4/3} dz = kz^3/3 \Big|_0^1 + z \Big|_1^{4/3} = k/3 + 4/3 - 1$$

$$k/3 + 1/3 = 1 \qquad k/3 = 2/3 \qquad k = 2$$



(b) $P(0 \leq z \leq 1) = \int_0^1 2z^2 dz = \frac{2z^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

4. FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DISCRETAS
 5. DISTRIBUCIÓN BINOMINAL

Considérense pruebas repetidas e independientes de un experimento, con dos resultados, uno favorable (éxito) y otro desfavorable (fracaso), donde $p =$ probabilidad de éxito y $q = 1 - p$, probabilidad de fracaso. El experimento binomial posee las propiedades siguientes: (a) un experimento consta de N intentos repetidos

- (a) el intento de un resultado puede ser éxito o fracaso.
- (b) La probabilidad de un éxito permanece constante de intento en intento.
- (c) Las repeticiones del ensayo son independientes.

La probabilidad de que sucedan x números de éxitos en n pruebas de un experimento es:

$$B(x; n, p) = \binom{n}{x} (p^x) (q^{n-x}) \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

La media, la varianza de la distribución binomial es:

$$M = np \quad \sigma^2 = npq \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

Ejemplo 11. El promedio de un jugador de béisbol de los águilas de Mexicali es de 0.27. cual es la probabilidad de que pegue un hit en sus cuatro turnos al bat.

Este problema puede solucionarse de dos formas:

(a) aplicando la formula

$$p = 0.27 \quad q = 1 - 0.27 \quad q = 0.73 \quad n = 4 \quad x = 1$$

$$b(x; n, p) = b(1; 4, 0.27) = \binom{4}{1} (0.27)^1 (0.73)^3 = 0.4201$$

Solución : La probabilidad es del 42. 01 % de que pegue un hit.

Ejemplo 12. El equipo de voleibol del cecyte xochimilco tiene 0.40 de probabilidad de ganar cuando juega. Si juega 4 veces ; hallar la probabilidad de que el cecyte xochimilco gane:

- (a) dos partidos
- (b) por lo menos un partido
- (c) mas de la mitad de los partidos.

(a) $p = 0.40 \quad q = 0.60 \quad n = 4 \quad x = 2$
 $b(2; 4, 0.40) = \binom{4}{2} (0.40)^2 (0.60)^2 = (6) (0.16) (0.36) = \mathbf{0.3456}$

(b) $P(x \geq 1) = P(1, 2, 3, 4) = b(x; 4, 0.40) = b(1; 4, 0.40) + b(2; 4, 0.40) + b(3; 4, 0.40) + b(4; 4, 0.40)$
 $= \binom{4}{1} (0.40)^1 (0.60)^3 + \binom{4}{2} (0.40)^2 (0.60)^2 + \binom{4}{3} (0.40)^3 (0.60)^1 + \binom{4}{4} (0.40)^4 (0.60)^0$
 $= (4) (0.40) (0.216) + (6) (0.16) (0.36) + (4) (0.064) (0.60) + (1) (0.0256)$
 $(1) = 0.3456 + 0.3456 + 0.0256 = \mathbf{0.8704}$

(c) $P(x \geq 2) = P(2, 3, 4) = b(x; 4, 0.40) = b(2; 4, 0.40) + b(3; 4, 0.40) + b(4; 4, 0.40)$
 $= (6) (0.16) (0.36) + (4) (0.064) (0.60) + (1) (0.0256)$
 $(1) = 0.3456 + 0.1536 + 0.0256 = \mathbf{0.1792}$



6. DISTRIBUCION DE POISSON

Los experimentos que proporcionan valores numéricos de una variable aleatoria x , el numero de éxitos que ocurren durante un intervalo de tiempo dado o en una región especificada, se conocen comúnmente con el nombre de experimentos poisson..

Esta distribución se aplica cuando el valor N es muy grande y la probabilidad de x éxitos se obtiene con:

$$P(x; M) = e^{-M} M^x / x! \quad x = 0,1,2,3,\dots,n \quad M = \text{numero de éxitos.}$$

$M = NP =$ promedio de éxitos que ocurren en una región dado 0 en un intervalo de tiempo.

Ejemplo 13. El 2% de fusiles especiales que compra la comisión federal de electricidad (CFE.) son defectuosos, ¿cual es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 400, existan exactamente 6 defectuosos?

$$N = 400 \quad M = (400) (0.02)$$

$$X = 6 \quad M = 8 \quad P(6; 8) = e^{-8} 8^6 / 6! = (0.00674) (15625) / 720$$

$$P = 0.02 \quad P(6;8) = 0.1221$$

Ejemplo 14. Los ladrillos de vidrio defectuosos se clasifican en una fabrica de acuerdo con que tengan rupturas estén decolorados, o ambas cosas, si las probabilidades respectivas son 0.50,0.40,0.10. hallar la probabilidad de que $6 \leq x < 10$ de estos ladrillos tengan ruptura, 3 esté defectuoso y 1 presente ambos defectos.

$$P \text{ ruptura} = 0.50 \quad N = 10 \quad M = NP = (10) (0.50)$$

$$P \text{ defectuoso} = 0.40 \quad x = 6 \quad M = 5$$

$$P \text{ ruptura defectosa} = 0.10$$

$$M = (10) (0.40) \quad P(6; 5) = e^{-5} 5^6 / 6! = (0.00674) (15625) / 720 = \mathbf{0.1462}$$

$$M = 4 \quad x = 3 \quad P(3, 4) = e^{-4} 4^3 / 3! = (0.0183) (64) / 6 = \mathbf{0.1952}$$

$$M = (10) (0.10) \quad P(1, 1) = e^{-1} 1^1 / 1! = \mathbf{0.367}$$

$$M = 1 \quad x = 1$$

Ejemplo 15. El numero promedio de demandas presentadas contra el CONALEP baja California es de dos demandas por semestre por parte de los maestros que piden las mínimas prestaciones de ley, ¿cual es la probabilidad de que en un semestre:

- (a) se presente exactamente una demanda
- (b) no se presente ninguna demanda
- (c) se presenten exactamente tres demandas.

$$(a) M = 2 \quad x = 1 \quad P(1; 2) = e^{-2} 2^1 / 1! = \mathbf{0.2707}$$

$$(b) M = 2 \quad x = 0 \quad P(0; 2) = e^{-2} 2^0 / 0! = \mathbf{0.1353}$$

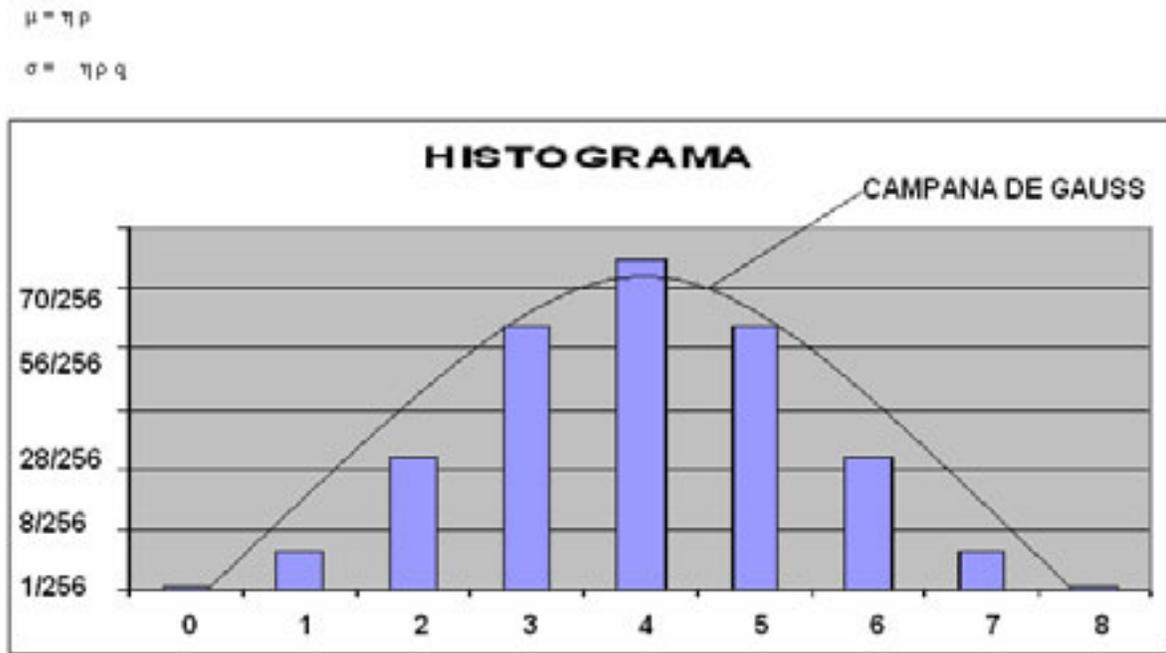
$$(c) M = 2 \quad x = 3 \quad P(3; 2) = e^{-2} 2^3 / 3! = \mathbf{0.1804}$$

7. APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL A LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Cuando n es grande y ni p ni q son muy próximos a cero, la distribución binomial $p(x) = b(x; n, p)$ se aproxima estrechamente a la distribución normal, esta propiedad se demuestra en el diagrama siguiente con:

$$N = 8 \quad P = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(x)$	1/256	8/256	28/256	56/256	70/256	56/256	28/256	8/256	1/256



Ejemplo 16. Una moneda se lanza 12 veces; hallar la probabilidad de que el número de sellos que aparezcan este entre 4 y 7.

- (a) por distribución binomial
- (b) Por la aproximación de la binomial a la normal.

(a) Por la distribución binomial:

$$b(x; n, p) = \binom{12}{4} (0.5)^4 (0.5)^8 + \binom{12}{5} (0.5)^5 (0.5)^7 + \binom{12}{6} (0.5)^6 (0.5)^6 + \binom{12}{7} (0.5)^7 (0.5)^5 = 0.1208 + 0.1933 + 0.2256 + 0.1933 = 0.7330$$

$$M = np \quad M = (12)(0.5) \quad M = 6$$

$$\sigma = \sqrt{npq} \quad \sigma = \sqrt{12(0.5)(0.5)} \quad \sigma = \sqrt{3} \quad \sigma = 1.73$$

(b) aproximación de la binomial a la normal.

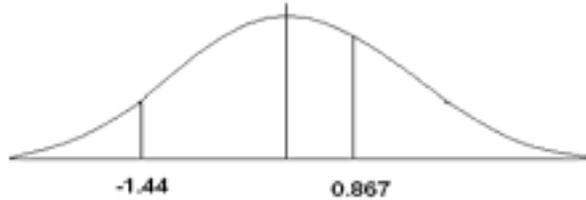


$P(4 \leq z \leq 7)$, como $P = 0.50$, se disminuye y aumenta esta cantidad a los intervalos menor y mayor quedado: $P(3.50 \leq z \leq 7.59)$ $z = x - M / \sigma$

$Z = 3.50 - 6 / 1.73 = -1.4451$ $z = 7.50 - 6 / 1.73 = 0.8670$

Por tablas

$P(3.50 \leq z \leq 7.50) = 0.4251 + 0.3078 = 0.7329$



Ejemplo 17. Un dado honrado se lanza 900 veces, hallar la probabilidad de que el 6 salga: (a) entre 100 y 125 veces.

Por aproximación de la binomial a la normal.

$N = 900$ $P_6 = 1/6$ $q_6 = 5/6$ $M = (900) (1/6)$ $M = 150$
 $\sigma = \sqrt{(900) (1/6) (5/6)}$ $\sigma = 11.18$

(a) $P(100 \leq z \leq 125)$

$Z = 99.5 - 150 / 11.18$ $z = -4.5617$

$Z = 125.5 - 150 / 11.18$ $z = -2.1914$

Por tablas: $0.50 - 0.4857 = 0.0143$



8. DISTRIBUCIÓN NORMAL

Uno de los más importantes ejemplos de una distribución de probabilidad continua es la distribución normal, curva normal o distribución gaussiana definida por la ecuación:

$$Y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-1/2 (x-M)^2/\sigma^2}$$

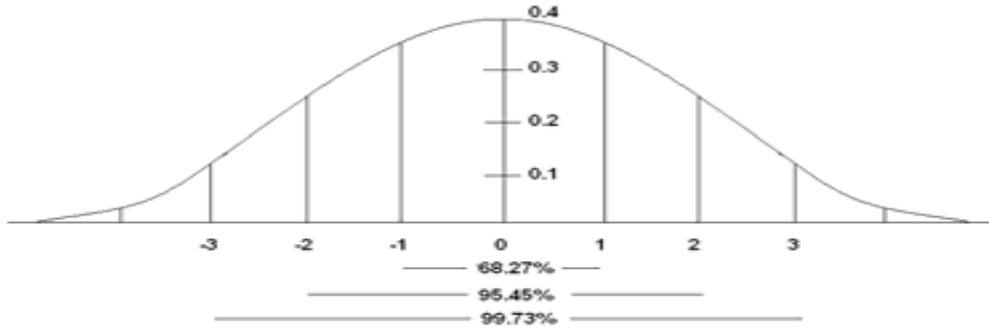
Donde: $M =$ media $\pi = 3.14159...$ $e = 2.71828...$ El área total limitada por la curva de la ecuación anterior y el eje x es 1. Cuando se expresa la variable x en unidades estándar:

$$Z = x - M / \sigma$$

La ecuación anterior es reemplazada por la llamado forma canónica.

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2Z^2}$$

En tal caso decimos que z esta normalmente distribuida con media 0 y varianza 1. La siguiente gráfica esta en forma canónica. Muestra que las áreas comprendidas entre $z = -1$ y $+1$, $z = -2$ y $+2$ y $z = -3$ y $+3$ son iguales respectivamente a 68.27 %, 95.45% y 99.73% del área total que es 1.



9. MANEJO DE TABLAS

En la tabla de la función de distribución normal observamos en la columna marcada z, desde o hasta 3.9; posteriormente tenemos el primer renglón el cual utilizaremos para la busca del segundo decimal a calcular.

Ejemplo 18. Hallar el área bajo la curva normal entre $z = 0$ y $z = 1.3$

$$P(0 \leq z \leq 1.3) = z\ 1.3 - z\ 0 = 0.4032 - 0$$

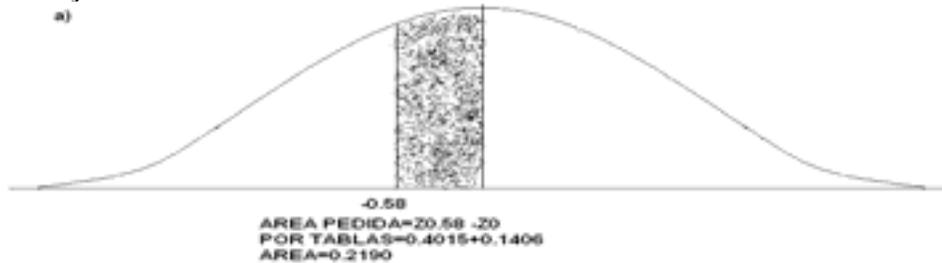
Área entre $z\ 1.3$ y $z\ 0 = \mathbf{0.4032}$



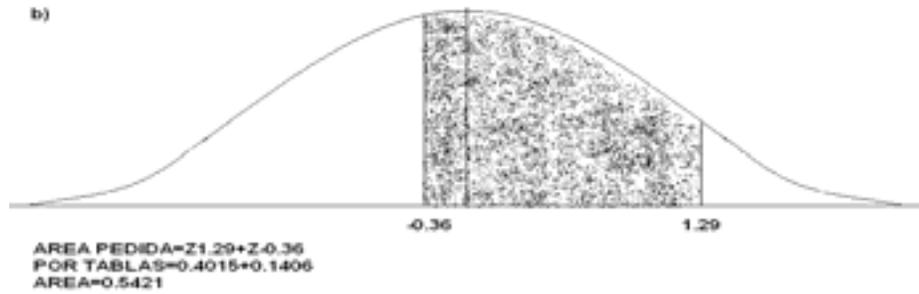
Ejemplo 19. Hallar el área bajo la curva, para cada uno de los siguientes casos:

- (a) entre -0.58 y $z = 0$
- (b) Entre -0.36 y 1.29
- (c) Entre $z = 0.91$ y $z = 1.83$
- (d) a la izquierda de -0.88
- (e) a la derecha de -1.36
- (f) a la derecha de 2.07

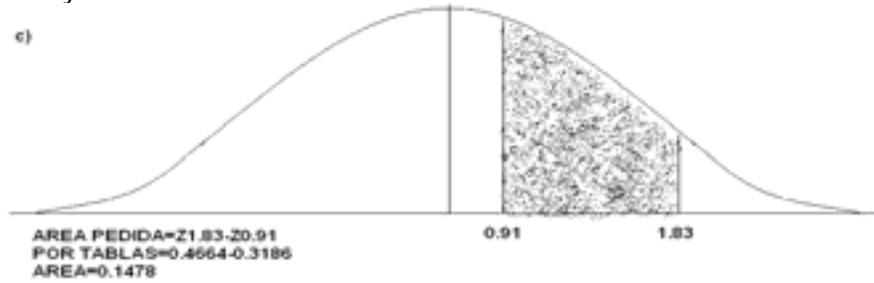
(a) entre -0.58 y $z = 0$



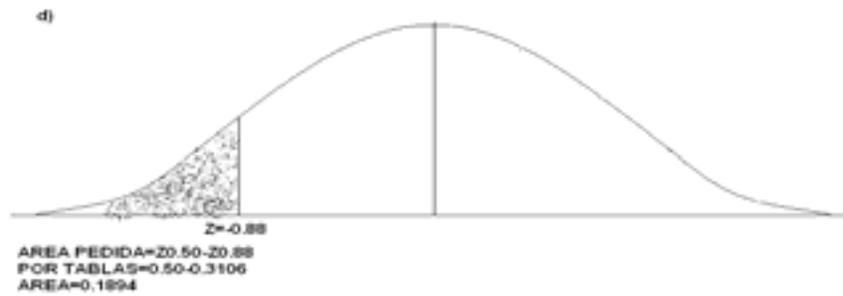
(b)Entre -0.36 y 1.29



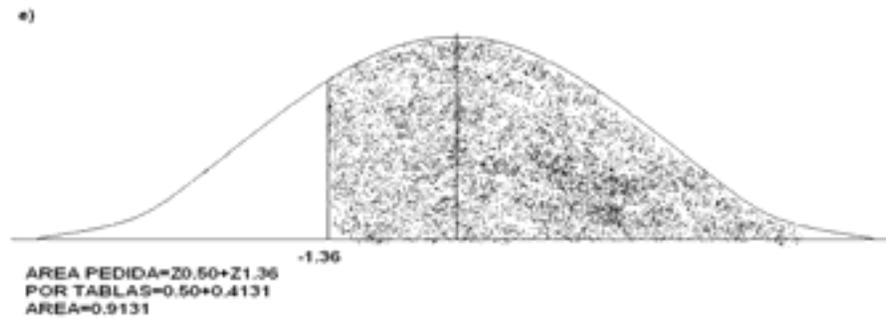
(c) Entre $z = 0.91$ y $z = 1.83$



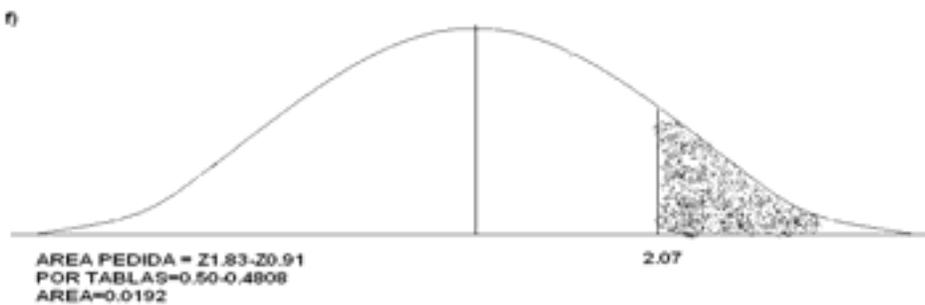
(d) a la izquierda de -0.88



(e) a la derecha de -1.36



(f) a la derecha de 2.07





Observación. Cuando el valor de z es del mismo signo el área bajo la curva normal disminuirá, por lo tanto valor mayor se le restara el menor. Cuando los valores de z son de diferentes signos el área bajo la curva aumenta, por lo tanto se sumaran los valores de z. Cuando se piden valores a los extremos a 0.50 se le restara el valor de z, para así obtener el área bajo la curva normal.

Ejemplo 20. Industrias café combate envasa café instantáneo soluble en frascos cuyos pesos netos tienen una distribución normal con una desviación estándar de 8 gramos. Si el 5 % de los frascos tiene un peso mayor de 200 gramos, ¿cual es el peso medio de ellos?



Si el 45% (0.4495) de los frascos pesan entre M y 200gr, entonces de acuerdo a las tablas se encuentra a 1.64σ .

$$200 = M + 1.64\sigma$$

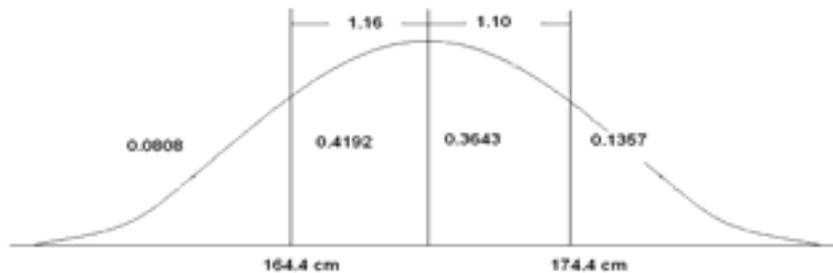
$$200 = M + 1.64 (8 \text{ gr.})$$

$$200 = M + 13.12$$

$$M = 200 - 13.12$$

$$M = 187 \text{ gr. (Aproximadamente)}$$

Ejemplo 21. La estatura de los soldados del segundo batallón de Mexicali esta distribuida normalmente. Si 13.57% de los soldados miden mas de 174.4 cm. y 8.08 % miden menos de 164.4 cm., ¿cual es la media y la desviación típica de las estaturas de los soldados?



$$174.4 = M + 1.1\sigma \text{ (tabla)}$$

$$164.4 = M - 1.4\sigma \text{ (tabla)}$$

Formando un sistema de ecuaciones:

$$M + 1.15\sigma = 174.4 \qquad M = 174.4 \text{ cm.} - 1.1 (4 \text{ cm.})$$

$$-M + 1.40\sigma = - 164.4 \qquad M = 174.4 \text{ cm.} - 4.4 \text{ cm.} \qquad M = \mathbf{170 \text{ cm.}}$$

$2.5\sigma = 10$ La media de la estatura de los soldados es de 1.70m y la desviación estándar es de 4 cm.

$$\sigma = 10/2.5$$

$$\sigma = 4 \text{ cm.}$$

Ejemplo 22. La media y la desviación estándar de un examen de geometría y trigonometría aplicado por el profesor y líder sindical, Alejandro Húngaro son 71 y 19 respectivamente. Hallar los resultados en unidades estándar de los estudiantes del cecyte Xochimilco que recibieron notas:

- (a) 55 (b) 66 (c) 84 (d) 96 (e) 88

(a) $z = 55 - 71 / 19 = -0.84$ (d) $z = 96 - 71 / 19 = 1.31$
 (b) $z = 66 - 71 / 19 = -0.26$ (e) $z = 88 - 71 / 19 = 0.89$
 (c) $z = 84 - 71 / 19 = 0.68$ $x = \sigma z + M$

Las calificaciones de resultados estándar:

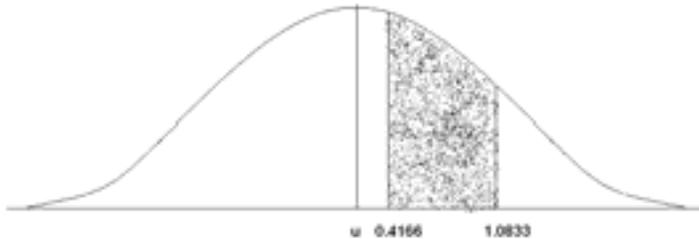
(a) $x = (19) (-0.84) + 71$ $x = 55$ (c) $x = (19) (0.68) + 71$ $x = 84$
 (b) $x = (19) (-0.26) + 71$ $x = 66$ (d) $x = (19) (1.31) + 71$ $x = 83$
 (e) $x = (19) (0.89) + 71$ $x = 88$

Ejemplo 23: En Mexicali, la temperatura durante junio esta distribuida normalmente con media de 105°F y desviación estándar de 12°. Hallar la probabilidad P de que la temperatura este entre 110° y 118°F.

$Z_{110^\circ} = 110^\circ - 105^\circ / 12$ $z_{110^\circ} = 0.4166$ $z_{118^\circ} = 118^\circ - 105^\circ / 12^\circ$ $z_{118^\circ} = 1.0833$

$P(110^\circ \leq T \leq 118^\circ) = P(0.4166 \leq z \leq 1.0833) = z_{1.0833} - z_{0.4166}$

T = temperatura promedio de junio en Mexicali, en grados Fahrenheit (F).



$P(0.4166 \leq z \leq 1.0833) = 0.3599 - 0.1591$
 $P(0.4166 \leq z \leq 1.0833) = \mathbf{0.2008}$

Existe el 20% de que la temperatura este entre 110° y 118° F (43.33° y 47.78°c)

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

La distribución exponencial es una distribución de probabilidad de mucha utilidad, principalmente en el área de confiabilidad y de las llamadas líneas de espera.

Es una función de un parámetro θ , en donde $\theta > 0$, cuya expresión es:

$$F(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad \text{para } x \geq 0$$

Su función de probabilidad acumulativa es:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$$



$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx = 1 - e^{-x/\theta}, \quad x > 0$$

θ = Media del tiempo entre ocurrencias.
 x = razón de tiempo, número real positivo.

Ejemplo 24. El Samy's va a pescar a San Felipe, si el tiempo que tarda en "picar" el anzuelo es una distribución exponencial, con una media del tiempo entre "picada" de 1/1.8 HR, encontrar la probabilidad de que tarde 20 minutos o menos para atrapar un pez "vela".

$$\theta = \frac{1}{1.8 \text{ hr}} \quad x = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \text{ hr}$$

$$F(x) = \int_0^{1/3} 1.8 e^{-1.8x} dx = 1 - e^{-1.8(1/3)} = 1 - e^{-0.6} \approx 0.4512$$

Por definición: $\int e^u du = e^u + c = 1 - 0.5488 = 0.4512$

Ejemplo 25. El tiempo entre llamadas que llegan a un conmutador 1.800 es una variable al azar que sigue una distribución exponencial con $\theta = 1/6.2$ minutos.

(a) Cual es la probabilidad de que la recepcionista tenga un descanso de 1 minuto entre llamadas.

$$\theta = 1/6.2 \text{ minutos} \quad x = 1 \text{ minuto} \quad x \leq 1 \text{ min.}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx = \int_0^1 6.2 e^{-6.2x} dx = -e^{-6.2(1)} + e^{-6.2(0)} = -0.0020 + 1 = 0.9980$$

10. DISTRIBUCIÓN CHI – CUADRADO

Sean $X_1, X_2, X_3, \dots, X_v$, v variables aleatorias independientes distribuidas normalmente con media cero y varianza 1. Considérese la variable aleatoria:

$$X = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots + X_v^2$$

Donde X se llama "chi – cuadrado", entonces podemos demostrar que para $X \geq 0$:

$$P(X \leq x) = \frac{1}{2^{v/2} \Gamma(v/2)} \int_0^x u^{(v/2)-1} e^{-u/2} du$$

y $P(X \leq x) = 0$, para $x < 0$.

La distribución definida, es la distribución chi – cuadrado y v es el número de grados de libertad. La distribución definida tiene la función de densidad correspondiente dada por:

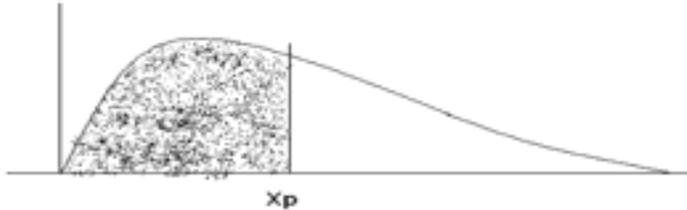
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{v/2} \Gamma(v/2)} x^{(v/2)-1} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



0
2

$X \leq 0$

Valores percentiles (X_p)
Para la distribución
"chi-cuadrado" con v de
grados de libertad
(área de sombra = P)



ejemplo 26. Dada la representación gráfica de la distribución X , con 5 grados de libertad.

Hallar los valores de X_1, X_2 para los cuales:

- (a) el área sombreada a la derecha de $X_2 = 0.05$
- (b) El área sombreada a la izquierda de $X_1 = 0.10$
- (c) El área sombreada a la derecha de $X_2 = 0.01$

Por tablas:

- (a) $1 - 0.05 = 0.99, 5 = 11.10$
- (b) $0.10, 5 = 1.61$
- (c) $1 - 0.01 = 0.99, 5 = 15.10$

Ejemplo 27. Para una distribución de X con 12 grados de libertad, hallar el valor de X , tal que:

- (a) El área a la derecha de $X = 0.05$
- (b) El área a la izquierda de $X = 0.99$
- (c) El área a la derecha de $X = 0.25$

(a) Percentil $1 - 0.05 = 0.95, 12 = 21.00$

(b) Percentil $0.99, 12 = 26.20$

(c) Percentil $1 - 0.025 = 0.975, 12 = 23.30$

Ejemplo 28. La desviación típica de las vidas medias de una muestra de 200 lámparas de alta eficiencia es 100 horas. Hallar los límites de confianza:

- (a) 95%
- (b) 99% para la desviación típica de todas las lámparas de ese tipo.

Los límites de confianza al 95% están dados por $S\sqrt{N} / X 0.975$ y $S\sqrt{N} / X 0.025$ para $v > 30$,

Podemos utilizar: $\sqrt{2x} - \sqrt{2v} - 1$, esta casi normalmente distribuida con media cero y desviación típica 1. Si Z_p es el valor Z percentil de la distribución normal canónica, donde:

$$X_p = \frac{2}{Z_p + \sqrt{2v} - 1}$$



(a) los limites de confianza están dados por $\sigma / \sqrt{N/X} 0.975$ y $\sigma / \sqrt{N/X} 0.025$ para $v = 200 - 1 = 199$ grados de libertad, luego entonces:

$$X 0.975 = 2 \frac{1}{2} (Z 0.975 + \sqrt{2(199) - 1}) = 2 \frac{1}{2} (1.96 + 19.92) = 239$$

$$X 0.025 = 2 \frac{1}{2} (Z 0.975 + \sqrt{2(199) - 1}) = 2 \frac{1}{2} (-1.96 + 19.92) = 161$$

$X 0.975 = 15.5$ y $X 0.025 = 12.7$, Los límites de confianza son:

$$100 \sqrt{200} / 15.5 = 91.24 \text{ HR} \qquad 100 \sqrt{200} / 12.7 = 11.35 \text{hr}$$

(b) $v = 200 - 1$ $v = 199$

$$X 0.995 = 2 \frac{1}{2} (Z 0.995 + \sqrt{2(199) - 1}) = 2 \frac{1}{2} (2.58 + 19.92) = 253$$

$$X 0.005 = 2 \frac{1}{2} (Z 0.005 + \sqrt{2(199) - 1}) = 2 \frac{1}{2} (-2.58 + 19.92) = 150$$

$X 0.975 = 15.5$ y $X 0.005 = 12.2$, Los límites de confianza:

$$100 \sqrt{200} / 15.9 = 88.95 \text{hr.} \qquad 100 \sqrt{200} / 12.2 = 115.92 \text{hr.}$$

11. DISTRIBUCIÓN " T " STUDENT

Si consideramos muestras de tamaño N tomadas de una población normal (o casi normal) con media M y si para cada una calculamos T, usando la media muestral x y la desviación típica σ , puede obtenerse la distribución de muestreo para T.

$$t = \frac{\bar{x} - M}{\sigma} \sqrt{N - 1}$$

La distribución viene dada por:

$$Y = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t}{N - 1}\right)^{N/2}} = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t}{v}\right)^{(v + 1) / 2}}$$

Donde Y_0 es una constante que depende de N tal que el área total bajo la curva es 1 y donde la constante $v = (N - 1)$ se llama el numero de grados de libertad. La distribución se llama " Distribución t de Student " en honor a su descubridor W. S. Gossett, quien publica su obra bajo el pseudónimo de " student " a principios del siglo XX.

12. INTERVALOS DE CONFIANZA

Al igual que se hizo con la distribución Normal, se pueden definir los intervalos de confianza 95%, 99% u otros, usando la tabla de la distribución t. De esta forma podemos estimar la media de la población dentro de los límites especificados.

Por ejemplo, si $- t 0.975$ son los valores de t para los que el 2.50% del área esta en cada cola en la distribución t, entonces el intervalo de confianza 95% para t es:

$$- t 0.975 < \frac{\bar{x} - M}{\sigma} \sqrt{N - 1} < t 0.975$$

Ejemplo 29. Hallar los valores críticos de t para los que el área de la cola derecha de la distribución t es 0.05 si el numero de grados de libertad v es: (a) 16 (b) 27 (c) 60

- (a) $1 - 0.05 = t 0.95$ $v = 16$ buscando en tablas: 1.75
 (b) $t 0.95$ $v = 27$ 1.70



(c) $t_{0.95} \quad v = 60$ 1.67

Ejemplo 30. Una prueba de 6 sogas de un cierto fabricante dio una tensión media de ruptura de 3 500kg y una desviación típica de 66kg, mientras el fabricante anunciaba que era de 3 650kg. ¿Puede sostenerse la afirmación del fabricante al nivel de significación?

(a) 0.05 (b) 0.01

H0: $M = 3\ 650\text{kg}$, fabricante tiene razón H= Hipótesis.
 H1 : $M < 3\ 650\text{kg}$, fabricante miente. N= 6

$$T = \frac{3\ 500 - 3\ 650}{66} \sqrt{6 - 1}$$

$t = - 5.08$

- (a) Por tablas: $v = 5 \quad 1 - 0.05 = 0.95 \quad - t = - 2.02$
 Como $- 5.08 < - 2.02$, H0 se rechaza
- (b) Por tablas: $v = 5 \quad 1 - 0.01 = 0.99 \quad - t = - 3.36$
 Como $- 5.08 < - 3.36$

Podemos concluir que es muy probable que es el fabricante de sogas este mintiendo y que la tensión media de ruptura sea menor a 3 650kg.

13. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se lanza un dado no cargado, ¿Cual es la probabilidad de obtener?
 - (a) Un número impar.
 - (b) Un número mayor que 3.

2. Se lanzan dos monedas. Hallar la probabilidad de obtener:
 - (a) Exactamente un " sello "
 - (b) Por lo menos un " sello "

3. Se lanzan dos dados no cargados, hallar la probabilidad de obtener:
 - (a) 7
 - (b) 11
 - (c) 7 o 11
 - (d) suma divisible por 3

4. En el " Mariano Matamoros, la probabilidad de que una familia tenga televisor cromático es 0.80, una maquina lavadora es 0.50 y de que tengan ambos es 0.45.
 ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga televisor o maquina lavadora o ambas cosas?

5. Las apuestas a favor de que Sarapia gane una partida de ajedrez contra Chavira están 3 a 2. Si se disputan 3 partidas, ¿Cuales son las apuestas?
 - (a) A favor de que Sarabia gane al menos 2.
 - (b) En contra de que Sarabia pierda las dos primeras.

6. Si llueve, un vendedor de paraguas en el tianguis de "Aguaje la Tuna" gana 3 000 pesos al día, pero si no llueve pierde 600 pesos. ¿Cuál es su esperanza matemática si la probabilidad lluvia es 0.30?
7. En la casilla electoral 289 del distrito 2 de Mexicali, se extraen de la urna "presidentes" 8 boletas amarillas y 7 azules, mientras en la casilla 290 se extraen 12 amarillas y 15 azules. Se elige una urna al azar y se saca una boleta.
 - (a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una boleta amarilla?
 - (b) Dado que la boleta resulto ser azul ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la urna 290?
8. Si las probabilidades están 5 a 3 a favor de que Argentina gane a México en Alemania 2006 no suceda, 2 a 1 del evento Portugal gane a México ocurra y 4 a 1 de que ninguno ocurra ¿Son independientes ambos eventos?
9. Dos empresas, "Urbi" y "Cadena" están examinando la convivencia de participar en la obra de construcción de una carretera, cuya concesión dependerá del monto de los ofrecimientos. "Urbi" presenta una oferta y la probabilidad es $\frac{3}{4}$ de que obtenga la obra con tal de que la empresa "Cadena" no presente su oferta. Las posibilidades están 3 a 1 a favor de que "Cadena" si la presente y si lo hace la probabilidad de que "Urbi" obtenga la obra es solamente.
 - (a) ¿Cuál es la probabilidad de que "Urbi" obtenga la obra?
 - (c) Si "Urbi" obtiene la obra, ¿Cuál es la probabilidad de que "Cadena" no haya presentado su proposición?
10. Tres joyeros idénticos tienen dos compartimentos. En cada compartimento del primer joyero hay un reloj de oro. En cada compartimento del segundo joyero hay un reloj de plata. En el tercer joyero en un compartimento hay un reloj de oro, en tanto abrimos uno de los compartimentos y hallamos un reloj de plata ¿Cuál es la probabilidad de que el otro compartimento tenga un reloj de oro?
11. Se fabrica gasolina en tres refinerías con niveles diarios de 400, 000, 800, 000 y 1' 200, 000 galones respectivamente. La proporción de la producción que esta por debajo de las especificaciones de octanaje en las tres refinerías es 0.03, 0.05 y 0.04 respectivamente; se determina que una pipa transportadora de gasolina lleva gasolina por debajo de las especificaciones de octanaje, y por lo tanto, la gasolina se devuelve para su mejor refinación. Determinar la probabilidad de que la pipa haya sido llenada en cada una de las tres refinerías.
 - (a) Sin hacer referencia a la información de que el embarque esta por debajo de las especificaciones del octanaje.
 - (b) Dado que se tiene la información adicional de que el envío esta por debajo de las especificaciones del octanaje.
12. En Playas de Rosarito, 40% de la población tiene cabellos castaños, 25% tiene ojos castaños y 15% tiene cabellos y ojos castaños, se escoge una persona al azar.
 - (a) Si tiene cabellos castaños, ¿cual es la probabilidad de que no tengan cabellos castaños?
 - (b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?

(c) ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

13. En el Cecyte Pacifico el 4% de los hombres y el 1% de las mujeres tienen más de 6 pies de estatura. Además, 60% de los estudiantes son mujeres. Ahora bien si se seleccionan al azar un estudiante y es más alto que 6 pies.

¿Cuál es la probabilidad que el estudiante sea mujer?

14. Utilizando la tabla de distribución binomial, determinar:

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| (a) $P(x = 8, n = 20, p = 0.30)$ | (d) $P(x = 6, n = 11, p = 0.40)$ |
| (b) $P(x \geq 11, n = 20, p = 0.30)$ | (e) $P(x > 6, n = 11, p = 0.40)$ |
| (c) $P(x \leq 6, n = 20, p = 0.30)$ | (f) $P(x < 5, n = 11, p = 0.40)$ |

15. Aplicando las tablas y comprobando por la fórmula binomial, calcular:

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| (a) $P(x = 5, n = 13, p = 0.60)$ | (d) $P(x < 4, n = 9, p = 0.80)$ |
| (b) $P(x \geq 9, n = 13, p = 0.60)$ | (e) $P(x > 4, n = 9, p = 0.80)$ |
| (c) $P(x \leq 4, n = 9, p = 0.50)$ | (f) $P(x = 4, n = 9, p = 0.80)$ |

16. De acuerdo a la teoría de la genética, cierto cruce de conejillos de indias da por resultados crías rojas, negras y blancas en una proporción 8, 4, 4. Encontrar la probabilidad de que en 8 descendientes, 5 sean rojos, 2 negros y uno blanco.

17. La probabilidad de que un paciente se recupere de una enfermedad es de 0.40, si se sabe que 15 personas han contraído esta enfermedad, hallar la probabilidad de que:

- (a) Sobrevivan por lo menos 10.
- (b) Sobrevivan entre 3 y 8.
- (c) Sobrevivan exactamente 5.

18. El promedio de un bateador de béisbol de " Los Toros de Tijuana " es de 0.300. Si batea 4 veces, ¿Cuál es la probabilidad de que se logre:

- (a) un imparable
- (b) Al menos un imparable

19. El equipo " Los Chapulines " del 6 BM tienen el 0.40 de probabilidad de ganar cuando juega. Si juega 4 veces, hallar la probabilidad de que " Los Chapulines " gane:

- (a) 2 partidos

- (b) por lo menos un partido
- (c) mas de la mitad de los partidos

20. Una muestra de 6 fusibles se selecciona sin restitución de un lote consistente de 5 000 fusibles. Suponiéndose que el 20% de los fusibles del lote son defectuosos, ¿cual es la probabilidad de que la muestra contenga exactamente 3 fusibles defectuosos?

21. Sea Z una variable aleatoria con distribución estándar, hallar:

- (a) $P(0 \leq Z \leq 1.41)$
- (b) $P(-0.77 \leq Z \leq 0)$
- (c) $P(-1.25 \leq Z \leq 2.11)$
- (d) $P(0.66 \leq Z \leq 1.36)$
- (e) $P(-1.78 \leq Z \leq -0.81)$
- (f) $P(Z \geq 2.28)$

22. Hallar el área bajo la curva normal en cada uno de los casos siguientes:

- (a) Entre $Z = 0$ y $Z = 1.30$
- (b) Entre $Z = -0.78$ y $Z = 0$
- (c) Entre $Z = -0.56$ y $Z = 2.01$
- (d) Entre $Z = 0.61$ y $Z = 1.44$
- (e) A la izquierda de $Z = -0.50$
- (f) A la derecha de $Z = 1.15$

23. Los pesos de los 10 488 estudiantes de nuevo ingreso a la UABC están distribuidos normalmente con una media de 71kg y una desviación estándar de 9kg. hallar el numero de estudiantes con pesos:

- (a) Inferiores o iguales a 46kg
- (b) Entre 55 y 60kg
- (c) Entre 68 y 80kg
- (d) Mayores o iguales a 91kg

24. El promedio de estudiantes inscritos en el jardín de niños "Josefa Ortiz de Domínguez" es una media de 500 estudiantes y una desviación estándar de 100. De acuerdo a la Directora Margarita Perea, los alumnos inscritos forman una distribución normal. Hallar la probabilidad de que el numero de alumnos inscritos este:

- (a) Entre 500 y 650 alumnos
- (b) Entre 450 y 600 alumnos

25. Se ha determinado que la vida útil de la llantas radicales "Poli gruesa" tiene una distribución normal con una media de 38 000km y una desviación estándar de 3 000km.

- (a) Hallar la probabilidad de que una llanta elegida al azar tenga una vida útil de cuando menos 35 000km.

- (b) Hallar la probabilidad de que dure más de 45 000km.
26. Las vidas útiles de las pilas "Generalito" están distribuidas normalmente. Si el 6.68% de las pilas duran mas de 56 horas y 30.85% duran menos de 52 horas, ¿cual es la media y cual es la desviación estándar?
27. "Periódicos Healy" desea publicar un "suplemento especial". Él Subdirector Editorial piensa que las ventas están distribuidas normalmente con una media de 30 000 ejemplares. Si además piensa que hay una probabilidad de 0.30 de vender mas de 35 000 ejemplares, ¿cual es la desviación estándar?
28. Las vidas útiles de las bombillas de 60 watts marca "Acme" tienen una vida media de 890 horas y una desviación estándar de 50 horas, en tanto que para la marca "pura luz" la media es 870 horas y la desviación típica de 40 horas. Suponiendo que en ambos casos las vidas útiles tienen distribución normal y se elige al azar una bombilla de cada marca.
29. La fabrica alimenticia Kellog's comercializa cereal de "peso neto" 500gr. El proceso automático de llenado de los paquetes puede regularse de modo que la cantidad media de cereal por paquete puede ajustarse al nivel que se desee. Suponiendo que la cantidad de cereal por paquete se distribuye normalmente con una desviación estándar de 12gr.
- (a) ¿A que nivel debe ajustarse el llenado medio de modo que solo el 0.001 de los paquetes tengan un peso neto inferior a 340 gr.?
- (b) ¿A que nivel debe ajustarse el llenado medio de modo que solo el 0.05 de los paquetes tengan un peso neto superior a 350gr.?
30. Un dado corriente se lanza 200 veces; hallar la probabilidad de que el lado que salga:
- (a) Entre 28 y 35 veces
- (b) Entre 34 y 39 veces
31. Supóngase que 300 erratas están distribuidos al azar a lo largo de un libro de 500 páginas. Hallar la probabilidad de que una pagina dada contenga:
- (a) Dos erratas exactamente
- (b) Dos o mas erratas
32. La probabilidad de que un automovilista sea multado por exceso de velocidad en el Blvd. Lázaro Cárdenas es 0.85, ¿ cual es la probabilidad de que 15 automovilistas sean multados:
- (a) entre 3 y 7 automovilistas
- (b) 8 automovilistas

- (c) máximo 9 automovilistas
- (d) Mínimo 8 automovilistas.

33. La probabilidad de que una turista norteamericana que visita a San Felipe se case con un mexicano es de 0.0004. Cual es la probabilidad de que de 10 000 turistas norteamericanos que visitan San Felipe, por lo menos tres de ellas se casen con mexicanos.

34. Una maquina de sodas esta regulada para que descargue un promedio de 207 ml (mililitros) por vaso. Si la cantidad del liquido esta distribuida normalmente por una desviación estándar de 15ml.

- (a) ¿Qué fracción de los vasos contendrá más de 231ml?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un vaso contenga entre 198ml y 216ml?
- (c) Usando vasos con capacidad de 237ml, ¿cuántos de los siguientes 1 000 vasos servidos se derramaran?

35. Para una distribución de " Student " con 15 grados de libertad, hallar el valor de t_1 , tal que:

- (a) el área a su derecha sea 0.05
- (b) el área a su izquierda sea 0.95
- (c) el área a su derecha sea 0.10
- (d) la suma de áreas a la derecha de t_1 y a la izquierda de $-t_1$ sea 0.01
- (e) el área entre $-t_1$ y t_1 sea 0.75

36. Hallar el valor de t_1 para que:

- (a) el área sombreada de la derecha es 0.05
- (b) el área total sombreada es 0.05
- (c) el área total sin sombrear es 0.99
- (d) el área en sombra de la izquierda es 0.01
- (e) el área a la izquierda de t_1 es 0.90

37. Una Agroindustria interesada en invertir en el algodón cosechado en el valle de Mexicali, ejecuta una muestra de 12 medidas de la tensión de ruptura de hilos de algodón de una media de 9.38gr. y una desviación típica de 1.94gr. Hallar los limites de confianza:

- (a) 95%
- (b) 99% para la verdadera tensión de ruptura.

38. En un manicomio se realiza un experimento con cinco medidas del tiempo de reacción de un "desequilibrado mental" ante un sedante, se han registrado como 0.28, 0.30, 0.27, 0.33 y 0.31 segundos. Hallar los limites de confianza:

- (a) al 95%
- (b) Al 99% para el tiempo real de acción.

39. En un examen de Ecología, 9 estudiantes de 4 EP obtuvieron media de 88 con desviación típica 6 y 13 en calculo consiguieron una media de 84, con una desviación típica de 8. Mediante un nivel de significación de 0.05. Determinar si el primer grupo es superior al segundo.
40. Para una distribución χ^2 – cuadrado con 15 grados de libertad, hallar el valor de X_c , tal que:
- El área a la derecha de X_c es 0.05
 - El área a la izquierda de X_c es 0.99
 - El área a la derecha de X_c es 0.025
41. Hallar los valores críticos de X , para los cuales el área de la cola derecha de la distribución χ^2 – cuadrado, si el numero de grados de libertad, v , es igual a:
- 9
 - 18
 - 27
 - 45
42. Si el Banco " Todo Te lo Quito " recibe un promedio de 6 cheques falsos al día ¿ Cuales son las probabilidades de que reciba:
- cuatro cheques falsos en un día cualquiera
 - los cheques falsos en dos días consecutivos cualesquiera.
43. El profesor Mezta dicta un curso de estadística y quiere tomar una prueba en cada clase. Sabedor de que a veces se olvida de ir a hacer su clase, ha dado instrucciones a su auxiliar de que se haga cargo de la clase cuando el esta ausente. Si el Profesor Mezta hace la clase, la probabilidad es 0.70 de que tome la prueba en tanto que si el auxiliar hace la clase, esta es solo de 0.10. Si el profesor Mezta falta al 80% de sus clases:
- ¿Cual es la probabilidad de que haya una prueba en una clase dada?
 - Suponiendo que hubo prueba en una clase determinada, ¿Cual es la probabilidad de que el profesor Mezta haya estado presente?
44. El " Chompiras " es un ladrón aficionado. La probabilidad de que abra una caja con joyas en un intento es 0.20. ¿Cuál es la probabilidad de que:
- Necesite exactamente dos intentos para abrir la caja.
 - Abra la caja con más de tres intentos?
45. Las alturas de los Naranjos están distribuidas normalmente. 2.78% miden mas de 15 pies y 83.14% miden menos de 13 pies. Determinar la altura media y la desviación estándar.

UNIDAD 6

ESTADÍSTICA INFERENCIAL Y APLICACIONES



ESTADISTICA INFERENCIAL Y APLICACIONES

1. Conceptos Fundamentales

UNIVERSO Y MUESTRA

Cualquier conjunto de individuos u objetos que tengan alguna característica común observable constituye una población o universo; cualquier subconjunto de una población es una muestra de esa población. El termino población puede definirse o a los elementos medibles o a las características medibles mismas, uno de los problemas mas importante de la Estadística es decidir que información acerca de la distribución de la población, puede inferirse de un estudio de la muestra.

Un tercer tipo de la distribución consiste en la distribución de una característica, medida para cada una de las muestras posibles de tamaño determinado, que podrían obtenerse de un universo.

Por ejemplo, si obtenemos todas las muestras posibles de 100 estudiantes del Cecyte Zona Río y calculamos la altura media de cada muestra, tendremos un gran número de medias. Estas medias forman una distribución que llamamos distribución maestra de la media de muestras de tamaño 100.

Un ejemplo de poblaciones y muestras es la siguiente: Si se hace una encuesta para determinar la opinión de la gente de Mexicali acerca de la propuesta de ley para la seguridad pública con la cual toda persona que ande vagando después de las 23 horas y que no compruebe su manera honesta de vivir, sea recluida a prisión. Se encuestan a 1,500 ciudadanos y anotan el número de opiniones favorables, la característica medida es de tipo discreto; se anotó "1" si la respuesta es favorable y "0" si es desfavorable.

MUESTRA

El tamaño de una muestra que se representa con la letra "N", es el número de elementos de la muestra. Una muestra puede ser de cualquier tamaño, desde $N= 1$, hasta el número total de elementos del universo.

El método de elección de una muestra es un factor importante para saber que uso puede hacerse de la muestra. Si algunos elementos del universo son elegidos mas fácilmente que otros, se dice que la muestra es no centrada.

Se ha comprobado que los métodos subjetivos de elección de elementos para una muestra, a menudo conducen a muestras no centradas.

TEORIA DE MUESTREO

La Teoría de Muestreo estudia la relación entre una población y las muestras tomadas de ella. Es de gran utilidad en muchos campos, por ejemplo para estimar magnitudes desconocidas de una población, tales como la media y varianza llamados parámetros.

DECISIONES ESTADÍSTICAS

En la práctica nos vemos obligados con frecuencia a tomar decisiones relativas a una población sobre la base de información proveniente de muestras. Tales decisiones se llaman "decisiones estadísticas".

ESTIMACIÓN DE LA MEDIA POBLACIONAL A PARTIR DE UNA MUESTRA GRANDE

Una muestra es considerada grande cuando sus elementos son iguales o mayores a treinta. Si todas las medias muestrales se seleccionan todas las muestras posibles de tamaño "n" de una población que tiene media μ y desviación típica, entonces estas medias muestrales están distribuidas en forma aproximadamente normal. Cuando estas medias muestrales están distribuidas normalmente, esperamos que el 95% de los \bar{x} estén en el intervalo definido por:

$$M \pm 1.96 \sigma / \sqrt{n}$$

El intervalo $\bar{x} \pm 1.96 (\sigma/\sqrt{n})$, se denomina intervalo de confianza 0.95 de estimación de M. Para determinar este intervalo de estimación para M, seria necesario conocer la desviación



estándar de la población, la cual, por lo general, no se conoce. Sin embargo, si el tamaño de la muestra es de 30 o más, la desviación típica de la población σ , puede aproximarse por la desviación típica s y el intervalo de confianza exacto $M \pm 1.96 (\sigma / \sqrt{n})$ queda aproximado por el intervalo $(x \pm 1.96 (s / \sqrt{n}))$. Este intervalo se llama intervalo aproximado de confianza 0.95 de estimación \pm . Del mismo modo, el intervalo $x \pm 2.58 (\sigma / \sqrt{n})$ se llama intervalo aproximado de confianza 0.99 de estimación de M .

En general, el intervalo $x \pm z (\sigma / \sqrt{n})$ es un intervalo aproximado de confianza de estimación M , donde el valor de z se determina a partir del grado de confianza requerida en la estimación M .

Ejemplo 1. Una muestra aleatoria de 200 alumnos del Instituto Tecnológico de Mexicali tiene un puntaje de Coeficiente Intelectual (CI) medio de 112 y una desviación típica de 10.

- (a) Obtener un intervalo de confianza 0.95 de estimación del puntaje medio de CI de los alumnos del ITM.
- (b) Obtener un intervalo de confianza 0.99 de estimación del puntaje medio de CI de los alumnos del ITM:

(a) $x \pm 1.96 (s / \sqrt{n}) \quad 112 \pm 1.96 (10 / \sqrt{200}) = 112 \pm 1.38$
 El Intervalo de Confianza $110.62 \leq x \leq 113.38$

(b) $x \pm 2.58 (s / \sqrt{n}) \quad 112 \pm 2.58 (10 / \sqrt{200}) = 112 \pm 1.82$
 El Intervalo de Confianza $110.18 \leq x \leq 113.82$

2. DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA

Antes de seleccionar la muestra, es necesario decidir el tamaño que esta debe tener. En general, el tamaño de la muestra queda determinado por el grado de precisión requerido en la estimación de la media poblacional a partir de la muestra. En lo que se refiere al grado de precisión requerido deben considerarse dos aspectos:

- 1. La magnitud del máximo error permisible.
- 2. El grado de confianza de que el error en la estimación no exceda del máximo error permisible.

Ejemplo 2. La Asociación de Ahorro y Préstamo “El Arbolito Tracalero” desea determinar la cantidad promedio que tienen sus clientes en sus cuentas de ahorro. La desviación estándar de todas las cuentas de ahorro es estimada por el Gerente en 40,000 pesos.

- (a) ¿Qué tamaño de muestra se requiere para afirmar con confianza 0.95 que el error en la estimación no exceda en 20,000 pesos?
- (b) ¿Qué tamaño de muestra se requiere para afirmar con confianza 0.95 que el error en la estimación no excede en 40,000 pesos?
- (c) Compárense los tamaños muestrales y los errores máximos permisibles.

(a) $n = z^2 \sigma^2 / e^2 \quad n = (1.96^2) (40000^2) / (20000^2) \quad n = 15$

(b) $n = (1.96^2) (40000^2) / (40000^2) \quad n = 4$

(c) $4 < 15$

3. AJUSTE DE CURVAS

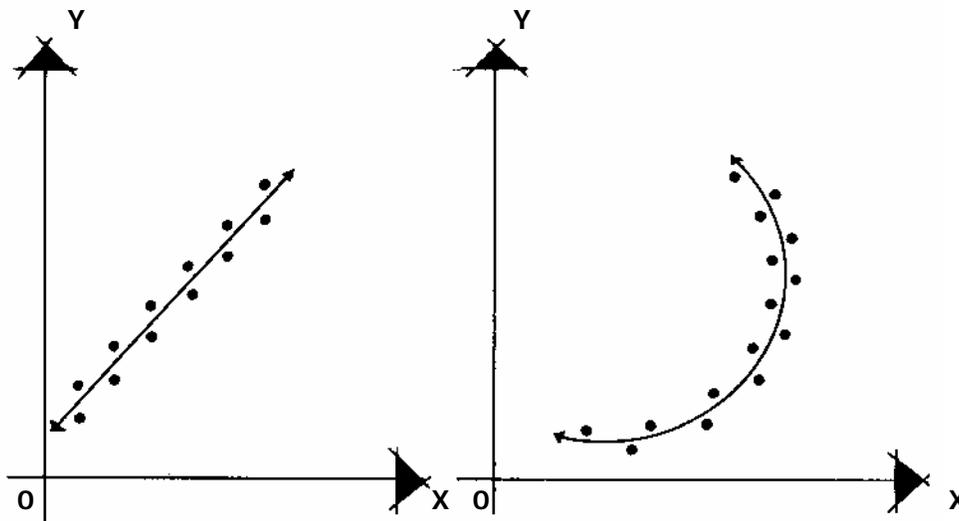
En la práctica encontramos a menudo que existen relaciones entre dos o más variables, por ejemplo los pesos de las personas dependen en cierta medida de sus alturas. Generalmente estas relaciones se expresan en forma matemática determinando una ecuación que conecte a las variables. Para hallar una ecuación que relaciones las variables, el primer paso es recoger datos que muestren valores correspondientes de las variables bajo consideración.

Así, por ejemplo, supongamos que x e y representan respectivamente, la altura y el peso de personas adultas, entonces la muestra de "N" individuos revelaría las alturas $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ y los pesos correspondientes y_1, y_2, \dots, y_n .

El próximo paso es marcar los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ sobre un sistema de coordenadas rectangulares; el conjunto de puntos resultante se le llama a veces "diagrama de dispersión".

A partir del diagrama de dispersión es posible con frecuencia visualizar una curva suave que se aproxime a los datos.

Tal curva se llama una curva aproximante. En la siguiente figura, por ejemplo los datos parecen aproximarse bien en una línea recta y decimos que hay una relación lineal entre las variables. En la otra figura, sin embargo, aunque existe una relación lineal entre variables, no es lineal, y se dice que es una relación no lineal.



ECUACIONES DE CURVAS APROXIMANTES

Varios tipos de curvas aproximantes y sus ecuaciones se presentan en la lista adjunta para facilitar posteriores referencias. Todas las letras excepto x e y representan constantes. Las variables x e y , se llaman variable independiente y dependiente, respectivamente, aunque estos papeles se pueden intercambiar.

Línea Recta

$$y = a + bx$$

Parábola, o curva cuadrática

$$y = a + bx + cx^2$$

Curva Cúbica

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Curva de Grado n

$$y = a + bx + cx^2 + \dots + k_n x^n$$



LA RECTA

El tipo más sencillo de curva aproximarte es una línea recta, cuya ecuación puede escribirse:

$$y = a + bx$$

Dados cualesquiera dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) sobre la recta, se puede determinar las constantes a y b. La ecuación así obtenida se puede expresar:

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

donde: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Esta ecuación se llama pendiente de la recta y representa el cambio en "y" dividido por el correspondiente en el cambio en x.

Cuando la ecuación se escribe $y = a + bx$, la constante b es la pendiente m. La constante a que es el valor de y, cuando $x = 0$, se llama y intersección.

4. LA RECTA DE MINIMOS CUADRADOS

La recta de mínimos cuadrados que aproxima el conjunto de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ tiene por ecuación:

$$y = a + bx$$

Donde las constantes a y b quedan fijadas al resolver simultáneamente las ecuaciones:

$$an + b\sum x = \sum y \quad (1)$$

$$a\sum x + b\sum x^2 = \sum xy \quad (2)$$

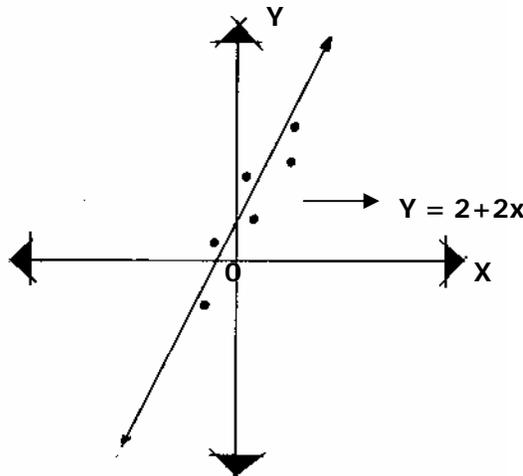
Que se llaman ecuaciones normales para la recta de mínimos cuadrados. Las constantes a y b del sistema de ecuaciones, se pueden hallar, si se desea, con las siguientes formulas:

$$a = \frac{(\sum y)(\sum x^2) - (\sum x)(\sum xy)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \quad b = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

Ejemplo 3. Construir una recta que aproxime los datos y hallar su ecuación:

x	3	4	6	6	8	9
y	2	4	8	10	14	16

$(3, 2), (4, 4), (6, 8), (8, 14), (9, 16)$, graficando los puntos:





La ecuación de la recta: Graficando el punto (6, 10)

$$10 = a + 6b \quad (1), \text{ graficando el punto } (8, 14)$$

$$14 = a + 8b \quad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que:

$$a = 2$$

$$b = 2$$

Ejemplo 4. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -6 y cuya intersección en y es 14.

La ecuación de la recta es $y = a + bx$,

$$a = 14$$

$$b = -6$$

La ecuación es:

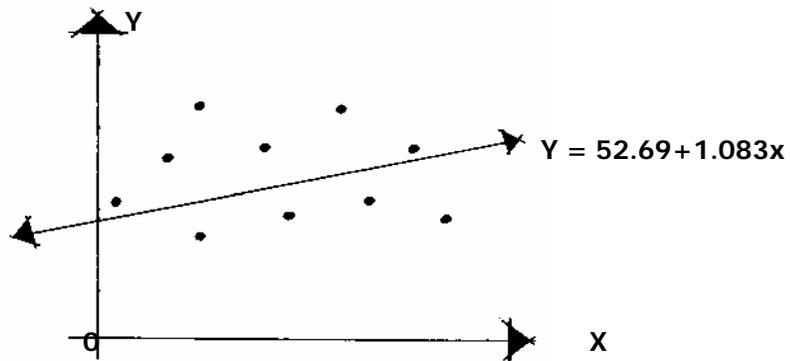
$$y = 14 - 6x$$

Ejemplo 5. La Profesora Alejandra Durán, aplica un examen de Cálculo a los alumnos del 4 EP. Un año antes a estos mismos alumnos les había aplicado un examen de Trigonometría, siendo los siguientes resultados, en función del total de reactivos.

TRIG	17	21	11	16	15	11	24	27	19	8
CALC	73	66	64	61	70	71	90	68	84	52

(A) Obtener un diagrama de dispersión para estos datos.

(B) Hallar la ecuación de la recta



x	y	x ²	xy	y ²
17	73	289	1241	5329
21	66	441	1386	4356
11	64	121	704	4096
16	61	256	976	3721
15	70	225	1050	4900
11	71	121	781	5041
24	90	576	2160	8100
27	68	729	1836	4624
19	84	361	1596	7056
8	52	64	416	2704
$\Sigma x = 169$	$\Sigma y = 699$	$\Sigma x^2 = 3183$	$\Sigma xy = 12146$	$\Sigma y^2 = 49927$

$$a = \frac{(699)(3183) - (169)(12146)}{(10)(3183) - (169)^2} \quad b = \frac{(10)(12146) - (169)(699)}{(10)(3183) - (169)^2}$$

$$a = 52.69$$

$$b = 1.083$$

la ecuación de la recta es: $52.69 + 1.083 X$



puntos por los que pasa la recta:

$$x = 0$$

$$y = 52.69 + 1.083(0)$$

$$y = 52.69$$

$$y = 0$$

$$0 = 52.69 + 1.083x$$

$$x = -52.69 / 1.083 \quad x = -48.65$$

5. LA PARABOLA DE MINIMOS CUADRADOS

La parábola de mínimos cuadrados que aproxima el conjunto de puntos $(X_1, Y_1), (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ tiene ecuación dada por:

$$y = a + bx + cx^2$$

donde las constantes a, b y c , se determinan al resolver simultáneamente las ecuaciones:

$$\sum y = an + b\sum x + c\sum x^2$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3$$

$$\sum x^2 y = a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4$$

A estas ecuaciones se les llaman Ecuaciones normales de la Parábola de mínimos cuadrados

REGRESIÓN

A menudo deseamos estimar, basados en datos de una muestra, el valor de una variable y correspondiente a un valor de la variable X . ello se puede hacer estimando el valor de y mediante una curva de mínimos cuadrados que ajuste los datos. La curva resultante se llama una curva de regresión de y sobre x , ya que y se estima a partir de x .

APLICACIONES A SERIES EN EL TIEMPO

Si la variable independiente es el tiempo, los datos muestran los valores de y en varios instantes. Datos ordenados en el tiempo se llaman 'series en el tiempo'. La recta o curva de regresión de y sobre x en este caso se suele llamar una recta o curva de tendencia y se utilizan en estimación y predicción.

6. PROBLEMAS EN MAS DE DOS VARIABLES

Los problemas que involucran a más de dos variables pueden tratarse de manera análoga a los de dos variables. Por ejemplo, puede haber una relación entre tres variables x, y, z , descrita por la ecuación:

$$Z = a + bx + cy$$

Que se le llama una ecuación lineal de las variables x, y, z .

En un sistema de coordenadas rectangulares tridimensional esa ecuación representa un plano y los puntos $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), \dots, (X_n, Y_n, Z_n)$ de la muestra pueden dispersarse no lejos de ese plano que se le llama plano aproximante. Por extensión del método de mínimos cuadrados, podemos hablar de un plano de mínimos cuadrados que aproxima los datos. Si estamos estimando Z a partir de valores de X e Y , se le llama un plano de regresión de Z sobre X e Y . las ecuaciones normales correspondientes al plano de mínimos cuadrados vienen dadas por:

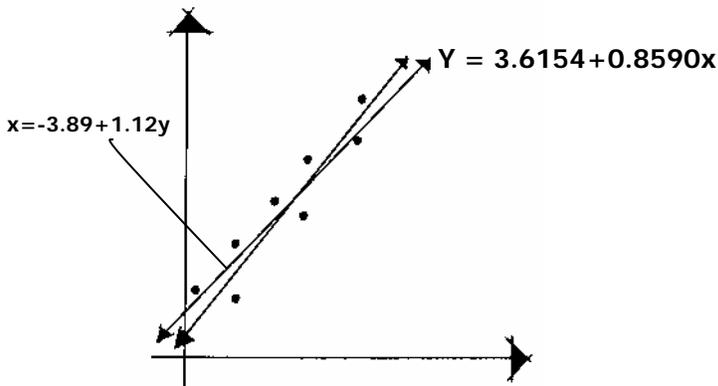


$$\begin{aligned} a_n + b\sum x + c\sum y &= \sum z \\ a\sum x + b\sum x^2 + c\sum xy &= \sum xz \\ a\sum y + b\sum xy + c\sum y^2 &= \sum yz \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Los siguientes datos representan los resultados de un examen de Alta Redacción a 8 estudiantes. El examen se dividió en dos etapas: antes y después del inicio del curso. Ajustar una recta de mínimos cuadrados de acuerdo a los datos, usando:

- (a) X como variable independiente
- (b) X como variable dependiente

Antes (x)	6	8	5	4	3	5	4	7
Después (y)	9	10	8	7	6	8	7	10



Registro de Datos

X	Y	X ²	XY	Y ²
6	9	36	54	81
8	10	64	80	100
5	8	25	40	64
4	7	16	28	49
3	6	9	18	36
5	8	25	40	64
4	7	16	28	49
<u>7</u>	<u>10</u>	<u>49</u>	<u>70</u>	<u>100</u>
$\sum x = 42$	$\sum y = 65$	$\sum x^2 = 240$	$\sum xy = 358$	$\sum y^2 = 543$

(a) x como variable independiente:

$$a = \frac{(\sum y)(\sum x^2) - (\sum x)(\sum xy)}{\sum nx^2 - (\sum x)^2} \qquad a = \frac{(65)(240) - (42)(358)}{(8)(240) - (42)^2} \qquad a = 3.6154$$

$$b = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \qquad b = \frac{(8)(358) - (42)(65)}{(8)(240) - (42)^2} \qquad b = 0.8590$$

La ecuación es: $y = 3.6154 + 0.8590x$

(b) X como variable dependiente:

$$c = \frac{(\sum x)(\sum y^2) - \sum (y)(\sum xy)}{n\sum y^2 - (\sum y)^2} \qquad c = \frac{(42)(543) - (65)(358)}{(8)(543) - (65)^2} \qquad c = -3.8991$$

$$d = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum y^2 - (\sum y)^2} \qquad d = \frac{(8)(358) - (42)(65)}{(8)(543) - (65)^2} \qquad d = 1.1260$$

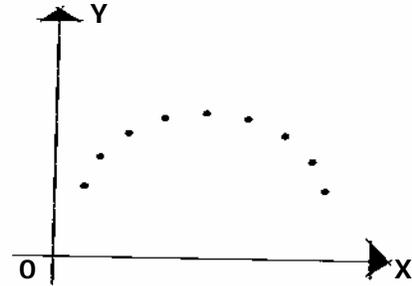
La ecuación es: $X = -3.8991 + 1.1260Y$



Ejemplo 7. Ajustar una parábola de mínimos cuadrados de la forma $Y = a + bx + cx^2$ a los datos de la siguiente tabla.

X	1.2	1.8	3.1	4.9	5.7	7.1	8.6	9.8
Y	4.5	5.9	7.0	7.8	7.2	6.8	4.5	2.7

X	Y	X ²	X ³	X ⁴	XY	X ²
1.2	4.5	1.44	1.73	2.07	5.40	6.48
1.8	5.9	3.24	5.83	10.50	10.62	19.12
3.1	7.0	9.61	29.79	92.35	21.70	67.27
4.9	7.8	24.01	117.65	576.48	38.22	187.28
5.7	7.2	32.49	185.19	1055.60	41.04	233.93
7.1	6.8	50.41	357.91	2541.17	48.28	342.79
8.6	4.5	73.96	636.05	5470.08	38.70	332.82
<u>9.8</u>	<u>2.7</u>	<u>96.04</u>	<u>941.19</u>	<u>9223.68</u>	<u>26.46</u>	<u>259.31</u>
$\Sigma x =$	$\Sigma y =$	$\Sigma x^2 =$	$\Sigma x^3 =$	$\Sigma x^4 =$	$\Sigma xy =$	$\Sigma x^2 y =$



Las ecuaciones normales son: $an + b\Sigma x + c\Sigma x^2 = \Sigma y$ n = 8
 $a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 = \Sigma xy$
 $a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 = \Sigma x^2 y$

Sustituyendo:

$8a + 42.20 + 291.20c = 46.40$ ----- (1)
 $42.20a + 291.20b + 2275.34c = 230.42$ ----- (2)
 $291.20a + 2275.34b + 18971.93c = 1449$ ----- (3)

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos:

$a = 2.59$
 $b = 2.06$
 $c = - 0.21$

La ecuación de la parábola es:

$$Y = 2.59 + 2.06x - 0.251x^2$$

7. PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 1. Una muestra aleatoria de 350 alumnos de la facultad de imágenes de la UABC, obtuvo una calificación promedio en Matemáticas I de 68 y una desviación estándar de 4.

- (a) Obtener un intervalo de confianza de 0.95 de estimación del puntaje medio de los alumnos de la Facultad de Ingeniería.
- (b) Obtener un intervalo de confianza de 0.99 de estimación del puntaje medio de los mismos alumnos.

Problema 2. Ajustar una recta de mínimos cuadrados a los siguientes datos, usando a X como variable independiente. Graficar los puntos y la recta.

X	6	10	12	16	18	22
Y	4	6	8	12	10	16



Problema 3. Los siguientes datos representan las emisiones de una muestra de vehículos de HC (hidrocarburo) y CO (Monóxido de Carbono), medidos en gramos por metro.

HC	0.65	0.55	0.72	0.83	0.57	0.51	0.43	0.37
CO	14.7	12.3	14.6	15.1	5.0	4.1	3.8	4.1

- (a) Ajustar una recta de mínimos cuadrados, usando a HC (x) como la variable independiente.
- (b) Ajustar una recta de mínimos cuadrados, usando a CO (y) como la variable dependiente.

Problema 4. El tiempo necesario para detener un vehículo, aplicando los frenos, se presenta en la siguiente tabla, la velocidad en m/seg. Y la distancia de frenado en metros.

- (a) Representar los datos.
- (b) Ajustar un parábola de mínimos cuadrados de la forma $D = a + bv + cv^2$ a los datos
- (c) Estimar D cuando $v = 20$ m/seg. y $v = 36$ m/seg.

Velocidad v en m/seg. (x)	9	14	18	22	27	31
Distancia frenado en m (y)	16	27	42	63	89	121

Problema 5. En la tabla se muestran las estaturas de 12 padres y sus hijos mayores en centímetros (cm.).

- (a) Construir un Diagrama de Dispersión de Datos.
- (b) Hallar la recta de mínimos cuadrados de y sobre x.
- (c) Hallar la recta de mínimos cuadrados de x sobre y.

Altura x del padre	165	160	170	163	173	157	178	167	173	170	175	180
Altura y del hijo	173	168	173	165	175	167	173	165	180	170	173	178



SOLUCION A PROBLEMAS

PROPUESTOS

SELECCIONADOS

UNIDAD 1

1. (a) Discreto (b) Continuo
(c) Continuo (d) Continuo
(e) Continuo (g) Continuo
(h) Continuo

2. (a) 38.24 (b) 0.6821 (c) 0.0000068
(d) 0.0000000000089203 (e) 216.496

3. (a) 143, 500 (b) 0.045122
(c) 0.0027 (d) 0.00006841
(e) 296 (f) Se deja al lector
(g) Se deja al lector (h) Se deja al lector
(i) Se deja al lector (j) Se deja al lector

4. (a) 8.43×10^{-4} (b) 6.35×10^8 (c) 3.75×10^{10}
(d) 1.945×10^{-9} (e) 1.90×10^{-4}

5. (a) 7.18×10^{-4} (b) 6.76×10^{11}
(c) 3×10^8 m/ seg (d) 1.1×10^4 m/ seg



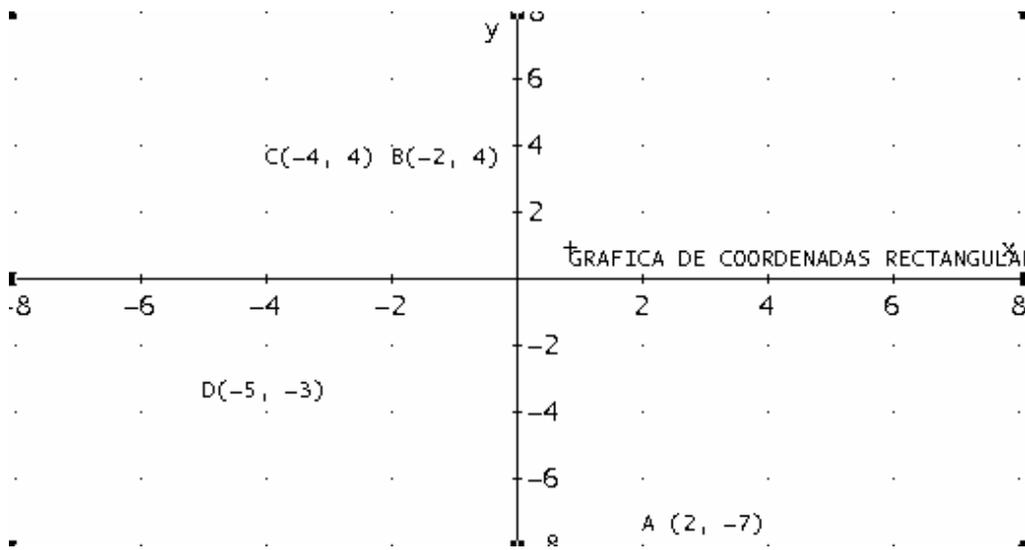
6. Por la diferencia de fechas para la resolución de este problema, se deja al lector la respuesta.

7. 55, 556 diskettes (aproximadamente).

8. (a) $z = -11$

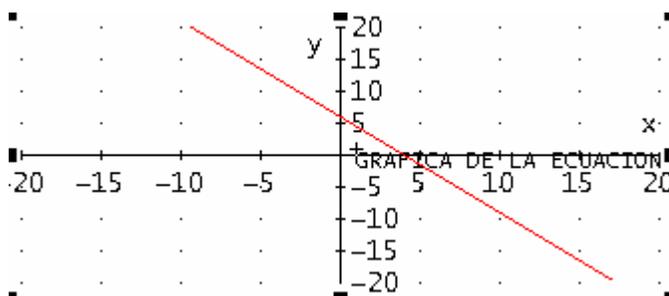
(b) $z = 139$

9. Grafica problema 9.

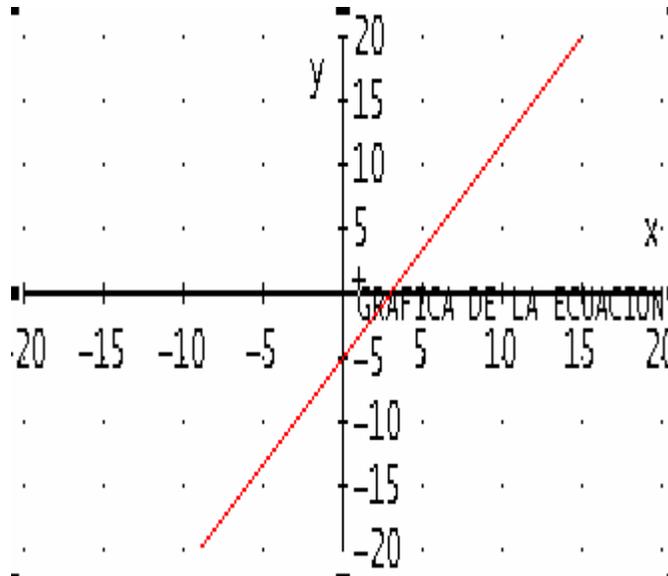


10.

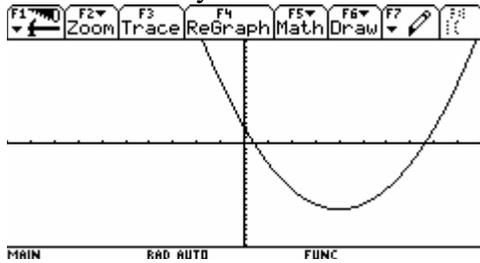
(b)



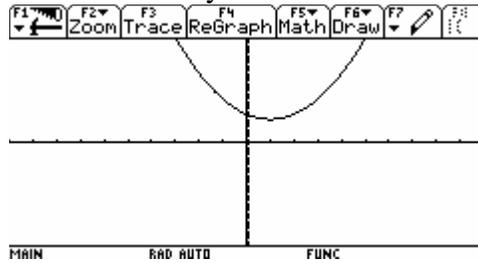
(a)



11. Grafica de $y = x^2 - 8x + 3$

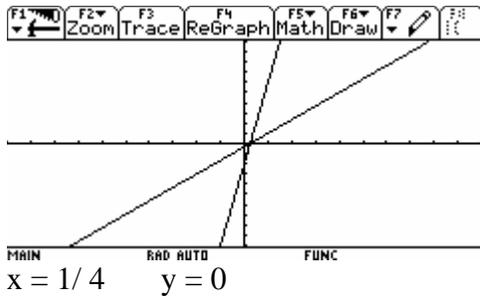


Grafica de $y = 2x^2 - 4x + 11$



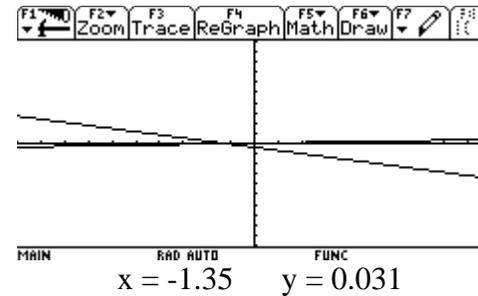
12. Grafica del sistema

$$\begin{aligned} -8x + y &= -2 & (1) \\ 4x - 3y &= 1 & (2) \end{aligned}$$

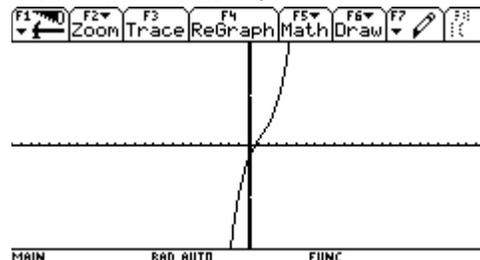


Grafica del sistema

$$\begin{aligned} 4x + 13y &= -5 & (1) \\ 2x - 54y &= -1 & (2) \end{aligned}$$

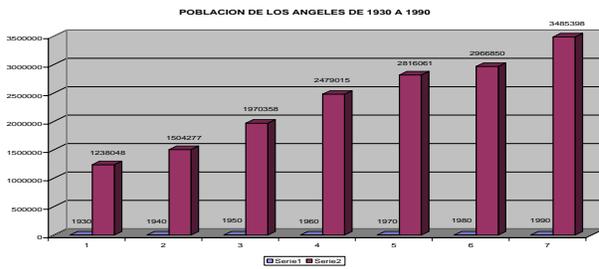


13. La grafica de: $y = x^3 - 4x^2 + 12x - 6$

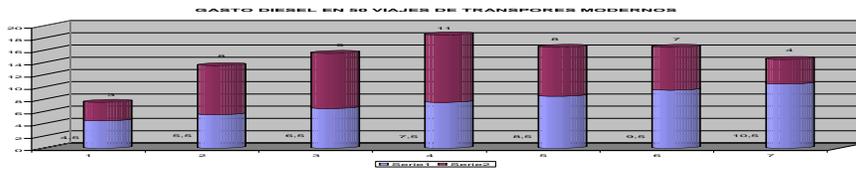




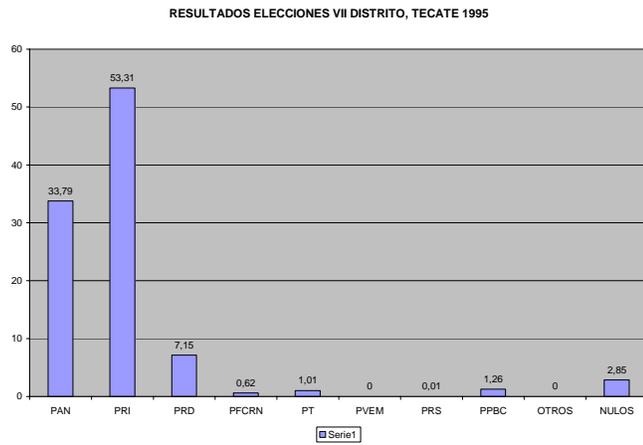
14.



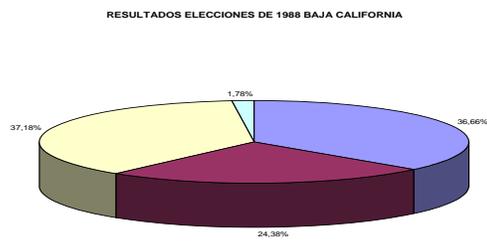
15.



16.



17.



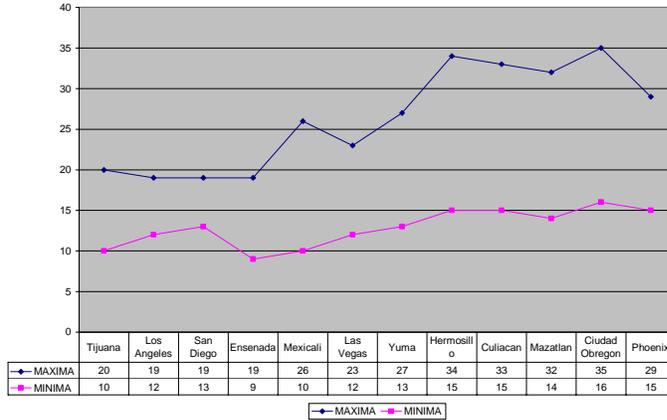
18.





TEMPERATURAS DOMINGO 21 DE ABRIL DE 2006

19.



20.

UNIDAD 2

- 6, 9, 11, 13, 19, 22, 24, 35, 43, 57, 62, 66
 - intervalo de clase = pato mayor – pato = 66-6
Intervalo de clase = 60
- valor máximo = 180
 - valor mínimo = 30
 - rango = 180-30 = 150
 - siete mayores = 180, 140, 140, 140, 130, 130, 130
 - siete menores = 30, 40, 30, 40, 50, 60, 60
 - 30, 30, 40, 40, 50, 60, 60, 60, 60, 62, 62, 64, 64, 70, 70, 70, 70, 72
 - ninguno
 - 34
 - tabla de registro de patos

$$N_o = 1 + 3.3 \text{ Log. } 60 \quad N_o = 6.87 \quad N_o = 7$$

$$A = \frac{180 - 30}{6.87} \quad A = 21.83$$

$$A = 12$$

INTERVALO CLASE	MARCA DE CLASE (x)	CONTEO	FRECUENCIA (f)	FREC. ACUM. (F)	x.f
30-52	41	III	6	6	246
53-75	64	III III III I	16	22	1024
76-98	87	III III II	12	34	1044
99-121	110	III III	8	42	880
122-144	133	III III III	15	57	1995
145-167	156	I	1	58	58
168-190	179	II	2	60	120

$$\sum f = 60$$

$$\sum xf = 5307$$



3.

4. se deja se resolución al estudiante

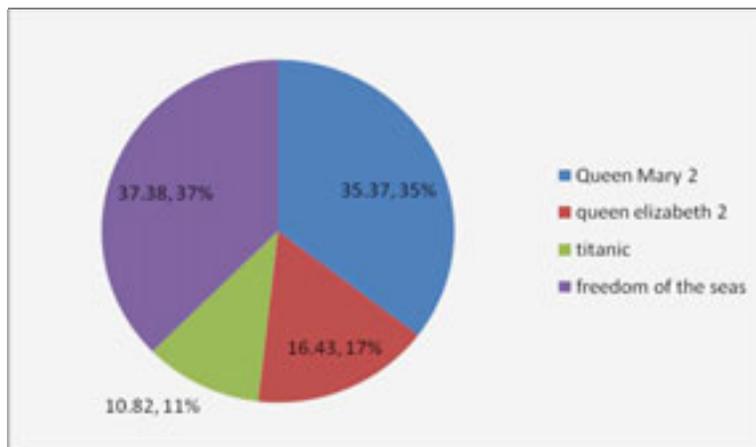
5.

Intervalo de clase	Marca de clase	conteo	frecuencia	Frecuencia acumulada	x.f
3-5	4	IIII I	6	6	24
6-8	7	IIII	4	10	28
9-11	10	III	3	15	30
12-14	18	IIII IIII III	13	26	169
15-17	16	IIII III	8	34	128
18-20	19	IIII II	6	40	114
			$\sum f = 40$		$\sum xf = 493$

6.

7.

BARCO	PORCENTAJE	ANGULO
Titanic	10.82%	39°
Queen Elizabeth 2	16.43%	59°
Queen mary 2	35.37%	127°
Freedom of the seas	37.38%	135°



8. (a) cinco valores mayores: 49, -37, 32, 29, 24

(b) cinco valores menores: 2, 3, 3, 4, 5

(c) $No = 1 + 3 \cdot 3 \log 50$ $No = 6.61$

$$A = \frac{49 - 2}{6.61}$$

$$A = 7.11$$

$$A = 7$$



UNIDAD 3

1. $f_1 (x_1)^2 + f_2 (x_2)^2 + f_3 (x_3)^2 + f_4 (x_4)^2 + f_5 (x_5)^2 + f_6 (x_6)^2 + f_7 (x_7)^2$

2. $u_1 (u_1 + 6) + u_2 (u_2 + 6) + u_3 (u_3 + 6) + u_4 (u_4 + 6)$

3.
$$\sum_{I=1}^4 (X_i + 5)^4$$

4.
$$\sum_{I=1}^7 gu (X_i - cu)^2$$

La media aritmetica:

5. $\bar{X} = 7.50$

6. media aritmetica $(\bar{X}) = \bar{X} = 71.5$

7.

(a)

Intervalo de Clase	marca de clase (X)	conteo	frecuencia (f)	f.a.	x.f
14-20	17	III III	7	7	136
21-27	24	III II	7	14	168
28-34	31	III II	7	21	217
35-41	38	III	23	23	114
42-48	45	I	1	24	45
49-55	52	I	1	25	52
			$\sum f = 27$		$\sum xf = 73$

(b)

(c)

$x = \frac{732}{27}$ $x = 27.11$ años

$X = 25$ años

Moda (M) = 17, 18, 23, 25

Se repiten dos veces (tetra modal)

(d) varían $2a = a^2 = 79.89$
Desviación típica: 8.94



8. (a) 500, 510, 514, 514, 516
 (b) 592, 589, 588, 584, 583

(c) intervalo de clase	marca de clase (x)	conteo	frecuencia (f)	F.A	xf
500-516	508	III	5	5	2540
517-533	525	III I	6	11	3150

- (d) media aritmética $(\bar{x}) = 548.80$
 Mediana $(x) = 549$
 Moda (M) = 514 y 522
 Se repiten 2 veces, es bimodal

- (e) varianza $(r^2) = 790.73$
 Desviación típica $(r) = 28.12$

10. media aritmética $(\bar{x}) = 6.43$
 Mediana $(x) = 6$

11. media aritmética $(\bar{x}) = 7.375$
 Mediana $(x) = 10$
 Moda (M) = 11

13. media aritmética $(\bar{x}) = 7.57$
 Mediana $(x) = 8$
 Desviación media (p.m.) = pendiente

14. (a) media aritmética $(\bar{x}) = 9.6$
 Mediana $(x) = 10$
 Moda (M) = 10
 (b) primer cuartil $(Q_1) = 24$
 (c) segundo decil $(D_2) = 19.2$

16. (a) media aritmética $(\bar{x}) = 75.7$
 Mediana $(x) = 79$
 Moda (M) = 83
 (b) segundo cuartil $(Q_2) = 757$
 (c) noveno decil $(D_9) = 1362.60$

20. (a) media aritmética $(\bar{x}) = 155.6$
 (c) $(Q_1) = 583.50$
 $(Q_2) = 1167$

UNIDAD 4

1. Sea S , el conjunto de los días de la semana, luego entonces:

$$S = \{\text{domingo, lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado}\}$$

2. Sea A , el conjunto de los meses del año: $A = \{\text{enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre}\}$

3. Llamemos N , al conjunto de los números, dígitos

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

4. la respuesta de este ejercicio es variable para cada estudiante, por lo que se deja al criterio del lector.

5. la frase u oración abierta debe incluir a un país de América del norte, entonces:

$$A = \{X \mid X \text{ es un país de América del norte}\}$$

ANEXO. Alaska es un estado de EEUU y Groenlandia es parte de América y Asia, por lo tanto no se incluyen.

6. el conjunto solución es:

$$M = \{\text{América, UNAM, Cruz Azul}\}$$

7.

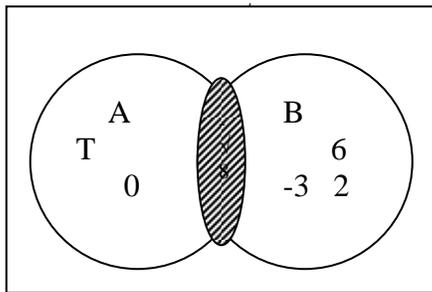
(A) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(B) $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(C) $B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

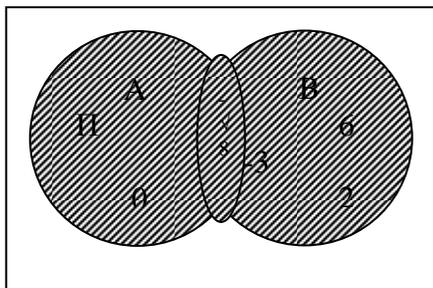
(D) $(A \cup B) \cap C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(E) $A \cup (B \cap C) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

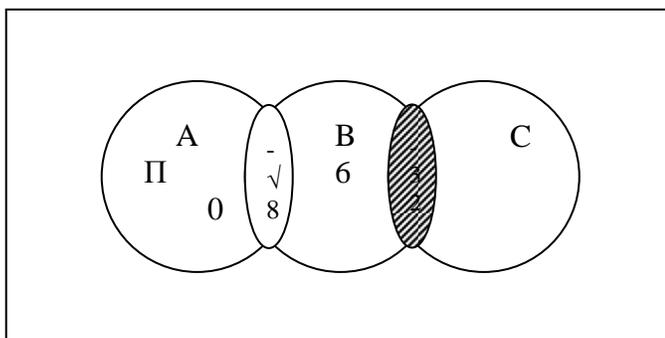


$A \cap B$

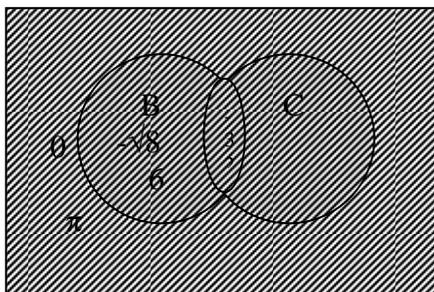
(B) $A \cup B = \{-\sqrt{8}, \pi, 0, 6, 2, -3\}$



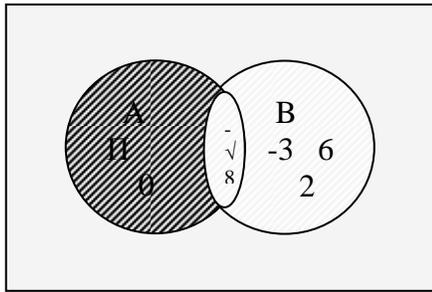
(C) $(A \cup B) \cap C = \{2, -3\}$
 $A \cup B = \{-\sqrt{8}, \pi, 0, 6, 2, -3\}$



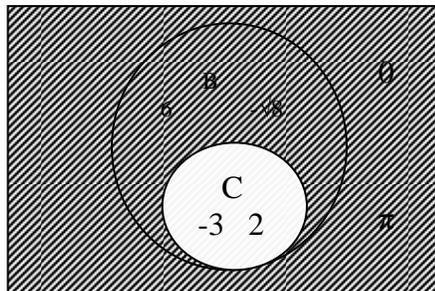
(D) $\overline{B \cup C} =$
 $\overline{B} = \{\text{Elementos de } U \text{ que no estan en } B\}$
 $\overline{B} = \{0, \pi\}$
 $\overline{C} = \{\text{Elementos de } U \text{ que no estan en } C\}$
 $\overline{C} = \{0, \pi, 6, -\sqrt{8}\}$



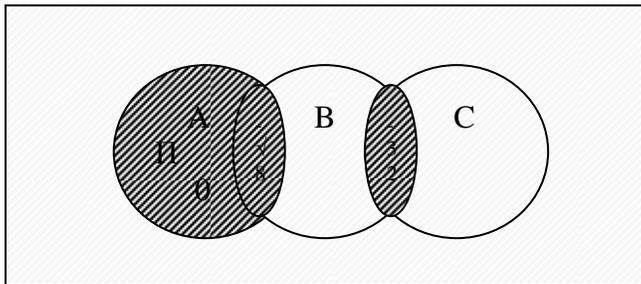
(E) $A - B = \{\pi, 0\}$



(F) $\overline{B \cap C} = \{0, \pi, 6, -\sqrt{8}\}$
 $B \cap C = \{2, -3\}$



(G) $(A \cup C) \cup (B \cap C) = \{-\sqrt{8}, \pi, 0, 2, -3\}$
 $A \cup C = \{-\sqrt{8}, \pi, 0, 2, -3\}$
 $B \cap C = \{2, -3\}$



16. (A) ${}_9P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

${}_9P_4 = 3024$

(B) ${}_7P_5 = \frac{7!}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

(C) ${}_{16}P_2 = \frac{16!}{14!} = 16 \cdot 15 = 240$



$$(D) {}_3P_3 = \frac{3!}{0!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$$

17. ${}_8P_1 = \frac{8!}{7!} = 8$ formas

18. Los hombres se pueden colocar ${}_7P_7$ y las mujeres ${}_6P_6$, cada colocación de ellas y ellos se pueden asociar, entonces:

$${}_7P_7 \cdot {}_6P_6 = 7! \cdot 6! = (5040)(720)$$

$${}_7P_7 \cdot {}_6P_6 = 3'628,800$$

19. Misma línea. Para la salida a México tiene 5 opciones y de regreso solo una, total 6 Opciones.

Diferente línea. Tiene 5 líneas para elegir de ida, más otras 5 para regresar, total 10 Alternativas.

20. ${}_n P_x = {}_9P_{4,3,2} = \frac{9!}{4!3!2!}$
 ${}_9P_{4,3,2} = 1260$

21. (a) campana $c=1$ $a=3$ $m=1$ $p=1$ $n=1$
 ${}_7P_{3,1,1,1,1} = \frac{7!}{3!1!1!1!1!} = 840$

(b) ana $a=2$ $n=1$
 ${}_3P_1 = \frac{3!}{2!1!} = 3$

(c) estadística $e=1$ $s=2$ $t=2$ $a=2$ $d=1$ $i=2$ $c=1$
 ${}_{11}P_{2,2,2,1,1,1} = \frac{11!}{2!2!2!1!1!1!} = 2'494,800$

(d) parangacutirimicuaro
 $P=1$ $a=4$ $r=4$ $n=1$ $g=1$ $u=3$ $i=4$ $c=2$ $t=1$ $m=1$ $o=1$
 ${}_{23}P_{4,4,4,3,2,1,1,1,1} = \frac{23!}{4!4!4!3!2!1!1!1!1!} = 1.56 \cdot 10^{17}$

(e) Xochimilco
 $x=1$ $o=2$ $c=2$ $h=1$ $i=2$ $m=1$ $l=1$
 ${}_{10}P_{2,2,2,1,1,1,1} = \frac{10!}{2!2!2!1!1!1!} = 453,600$

22. (a) temas arreglos
 ${}_3P_3 {}_4P_4(\text{MAT}) {}_6P_6(\text{FIS}) {}_2P_2(\text{QUIM})$
 $3! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 2! = 207,360$

(b) matemáticas acomodo libros restantes

$${}^4P_4 = 4! = 24$$

$${}^9P_9 = 9! = 362,880$$

$$23. (a) {}^6C_4 = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

$$(b) {}^7C_3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

$$(c) {}^{13}C_3 = \frac{13!}{3!10!} = 286$$

$$(d) {}^7C_5 = \frac{7!}{5!2!} = 21$$

$$(e) {}^{21}C_{18} = \frac{21!}{18!3!} = 1330$$

$$24. {}^{19}C_{16} = \frac{19!}{16!3!} = 969$$

$$25. \begin{matrix} 3 \text{ hombres} & 2 \text{ mujeres} \\ {}^7C_3 \cdot {}^6C_2 = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{6!}{2!4!} = 525 \end{matrix}$$

$$26. {}^{13}C_7 = \frac{13!}{7!6!} = 1716$$

27. Se deja al lector la solución del problema.

$$28. {}^{19}C_5 = \frac{19!}{5!14!} = 11,628$$

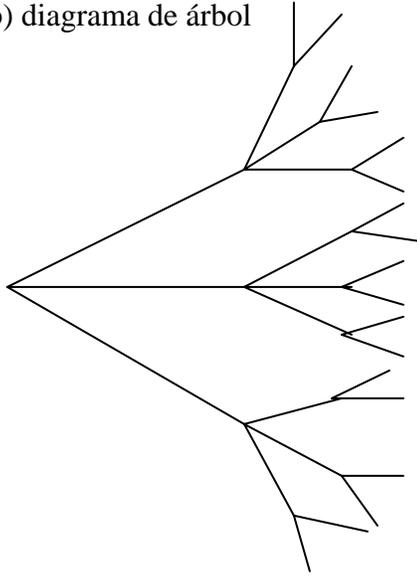
29. Son 7 dígitos en los teléfonos de Ciudad Juárez

(a) (1)(3)(5)(10)(10)(10) = 150,000 líneas posibles

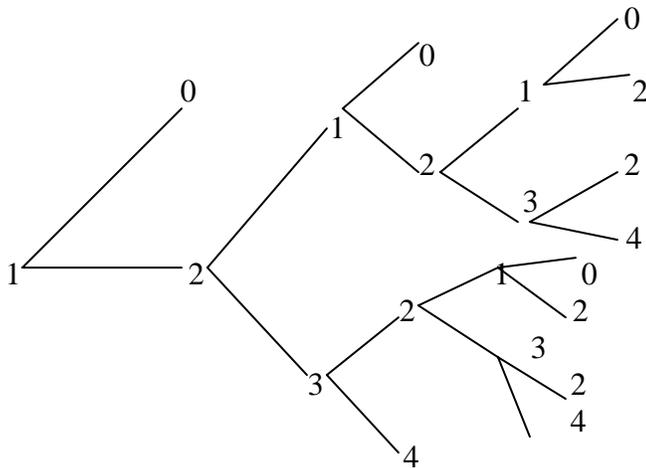
(b) Los primeros 10 números: 1240001, 1240002, 1240003, 1240004, 1240005, 1240006, 1240007, 1240008, 1240009.

(c) Los últimos 10 números: 1889999, 1889998, 1889997, 1889996, 1889995, 1889994, 1889993, 1889992, 1889991, 1889990.

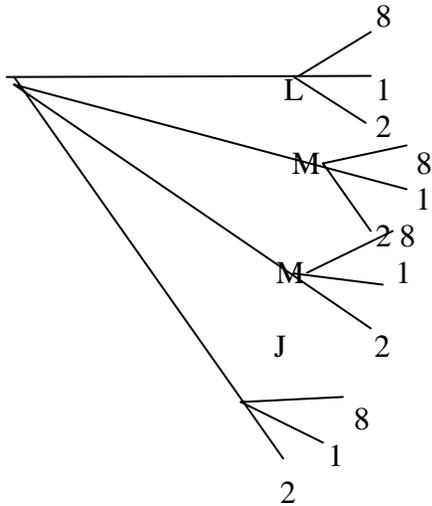
30. (a) $3 \text{ docentes} \cdot 3 \text{ admin} \cdot 2 \text{ int} = 18 \text{ formas}$.
 (b) diagrama de árbol



31. El siguiente diagrama describe la jugada. Cada numero del diagrama representa el Numero de dólares que el hombre tiene en ese punto.



32.

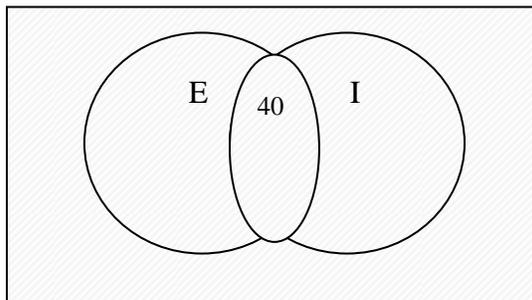


- | | |
|--------------------|---|
| 33. $N(A) = 84$ | $N(A \cap B \cap C) = 54$ |
| $N(B) = 99$ | $N(A \cup B) = 109$ |
| $N(C) = 85$ | $N(B \cup C) = 121$ |
| $N(A \cap B) = 74$ | $N(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = 101$ |
| $N(A \cap C) = 62$ | $N\{B \cap (A \cup C)\} = 42$ |

34. $\underline{B} = 92$

$I = 63$

$E \cap I = 40$



$$160 = E + 40 + I + X$$



$$160 = 52 + 40 + 23 + X$$

$$160 = 115 + X$$

$$X = 160 - 115$$

$$X = 45$$

35. (a) $P \leq 4 = 0.01 + 0.03 + 0.07 + 0.15 = 0.26$ o 26%
 (b) $P \geq 6 = 1 - 0.18 = 0.82$ o 82%
 (c) $5 \leq P \leq 8 = 0.19 + 0.18 + 0.14 + 0.12 = 0.63$ o 63%

37. $120 = 60 + 50 - 20$
 (a) $16.67 \frac{20}{120} = 0.1667$ o 16.67%
 (b)

40. $3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = (10,000) = 840,000$ líneas telefónicas

UNIDAD 5

1. (a) 0.50 (b) 0.50
2. (a) $1/4$ o 0.25 (b) $3/4$ o 0.75
3. (a) $6/36$ (b) $2/36$ (c) $8/36$
4. 0.85
10. $1/3$
13. 0.2778
14. (a) 0.1144 (c) 0.5724 (e) 0.9800
 (b) 0.0171 (d) 0.1470 (f) 0.5330
15. (a) 0.0660 (c) 0.5000 (e) 0.9800
 (b) 0.2950 (d) 0.025 (f) 0.0170
16. probabilidad rojos = 0.2190
 Probabilidad negros = 0.3115
 Probabilidad blanco = 0.2670
17. (a) 0.0330 (b) 0.7010 (c) 0.1859
18. (a) 0.4120 (b) 0.7610
19. (a) 0.3460 (b) 0.9120 (c) 0.1800



20. 0.082

21. (a) 0.4207 (b) 0.2794 (c) 0.6901 (d) 0.1677 (e) 0.1715 (f) 0.0113

22. (a) 0.4032 (b) 0.2823 (c) 0.6901 (d) 0.1960 (e) 0.3085 (f) 0.1215

23. (a) 29 estudiantes (c) 4936 estudiantes
(b) 764 estudiantes (d) 138 estudiantes

25. (a) 0.8413 (b) 0.001

27. $\sigma = 27.11$

32. (a) 0.0006 (b) 0.0029 (c) 0.0167

33. 0.1954 o 19.54%

34. (a) 0.0548 (b) 0.4514 (c) 23 vasos se derramaran

UNIDAD 6

1. (a) intervalo de confianza
 $67.5809 \leq x \leq 68.4191$
(b) intervalo de confianza
 $67.4484 \leq x \leq 68.5516$

Del problema 2 al problema 5 se deja su resolución al lector.



n	x	p										
		0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
2	0	0.903	0.810	0.640	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010	0.003
	1	0.095	0.180	0.320	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.320	0.180	0.095
	2	0.003	0.010	0.040	0.090	0.160	0.250	0.360	0.490	0.640	0.810	0.903
3	0	0.857	0.729	0.512	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.008	0.001	
	1	0.135	0.243	0.384	0.441	0.432	0.375	0.288	0.189	0.096	0.027	0.007
	2	0.007	0.027	0.096	0.189	0.288	0.375	0.432	0.441	0.384	0.243	0.135
	3	0.001	0.008	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	0.857	
4	0	0.815	0.656	0.410	0.240	0.130	0.063	0.026	0.008	0.002		
	1	0.171	0.292	0.410	0.412	0.346	0.250	0.154	0.076	0.026	0.004	
	2	0.014	0.049	0.154	0.265	0.346	0.375	0.346	0.265	0.154	0.049	0.014
	3		0.004	0.026	0.076	0.154	0.250	0.346	0.412	0.410	0.292	0.171
	4			0.002	0.008	0.026	0.063	0.130	0.240	0.410	0.656	0.815
5	0	0.774	0.590	0.328	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002			
	1	0.204	0.328	0.410	0.360	0.259	0.156	0.077	0.028	0.006		
	2	0.021	0.073	0.205	0.309	0.346	0.313	0.230	0.132	0.051	0.008	0.001
	3	0.001	0.008	0.051	0.132	0.230	0.313	0.346	0.309	0.205	0.073	0.021
	4			0.006	0.028	0.077	0.156	0.259	0.360	0.410	0.328	0.204
	5				0.002	0.010	0.031	0.078	0.168	0.328	0.590	0.774
6	0	0.735	0.531	0.262	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001			
	1	0.232	0.354	0.393	0.303	0.187	0.094	0.037	0.010	0.002		
	2	0.031	0.098	0.246	0.324	0.311	0.234	0.138	0.060	0.015	0.001	
	3	0.002	0.015	0.082	0.185	0.276	0.313	0.276	0.185	0.082	0.015	0.002
	4		0.001	0.015	0.060	0.138	0.234	0.311	0.324	0.246	0.098	0.031
	5			0.002	0.010	0.037	0.094	0.187	0.303	0.393	0.354	0.232
	6				0.001	0.004	0.016	0.047	0.118	0.262	0.531	0.735
7	0	0.698	0.478	0.210	0.082	0.028	0.008	0.002				
	1	0.257	0.372	0.367	0.247	0.131	0.055	0.017	0.004			
	2	0.041	0.124	0.275	0.318	0.261	0.164	0.077	0.025	0.004		
	3	0.004	0.023	0.115	0.227	0.290	0.273	0.194	0.097	0.029	0.003	
	4		0.003	0.029	0.097	0.194	0.273	0.290	0.227	0.115	0.023	0.004
	5			0.004	0.025	0.077	0.164	0.261	0.318	0.275	0.124	0.041
	6				0.004	0.017	0.055	0.131	0.247	0.367	0.372	0.257
	7					0.002	0.008	0.028	0.082	0.210	0.478	0.698



n	x	p											
		0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	
8	0	0.663	0.430	0.168	0.058	0.017	0.004	0.001					
	1	0.279	0.383	0.336	0.198	0.090	0.031	0.008	0.001				
	2	0.051	0.149	0.294	0.296	0.209	0.109	0.041	0.010	0.001			
	3	0.005	0.033	0.147	0.254	0.279	0.219	0.124	0.047	0.009			
	4		0.005	0.046	0.136	0.232	0.273	0.232	0.136	0.046	0.005		
	5			0.009	0.047	0.124	0.219	0.279	0.254	0.147	0.033	0.005	
	6				0.001	0.010	0.041	0.109	0.209	0.296	0.294	0.149	0.051
	7					0.001	0.008	0.031	0.090	0.198	0.336	0.383	0.279
9	0	0.630	0.387	0.134	0.040	0.010	0.002						
	1	0.299	0.387	0.302	0.156	0.060	0.018	0.004					
	2	0.063	0.172	0.302	0.267	0.161	0.070	0.021	0.004				
	3	0.008	0.045	0.176	0.267	0.251	0.164	0.074	0.021	0.003			
	4	0.001	0.007	0.066	0.172	0.251	0.246	0.167	0.074	0.017	0.001		
	5		0.001	0.017	0.074	0.167	0.246	0.251	0.172	0.066	0.007	0.001	
	6			0.003	0.021	0.074	0.164	0.251	0.267	0.176	0.045	0.008	
	7				0.004	0.021	0.070	0.161	0.267	0.302	0.172	0.063	
	8					0.004	0.018	0.060	0.156	0.302	0.387	0.299	
	9						0.002	0.010	0.040	0.134	0.387	0.630	
10	0	0.599	0.349	0.107	0.028	0.006	0.001						
	1	0.315	0.387	0.268	0.121	0.040	0.010	0.002					
	2	0.075	0.194	0.302	0.233	0.121	0.044	0.011	0.001				
	3	0.010	0.057	0.201	0.267	0.215	0.117	0.042	0.009	0.001			
	4	0.001	0.011	0.088	0.200	0.251	0.205	0.111	0.037	0.006			
	5		0.001	0.026	0.103	0.201	0.246	0.201	0.103	0.026	0.001		
	6			0.006	0.037	0.111	0.205	0.251	0.200	0.088	0.011	0.001	
	7				0.001	0.009	0.042	0.117	0.215	0.267	0.201	0.057	0.010
	8					0.001	0.011	0.044	0.121	0.233	0.302	0.194	0.075
	9						0.002	0.010	0.040	0.121	0.268	0.387	0.315
10							0.001	0.006	0.028	0.107	0.349	0.599	



n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
11	0	0.569	0.314	0.086	0.020	0.004						
	1	0.329	0.384	0.236	0.093	0.027	0.005	0.001				
	2	0.087	0.213	0.295	0.200	0.089	0.027	0.005	0.001			
	3	0.014	0.071	0.221	0.257	0.177	0.081	0.023	0.004			
	4	0.001	0.016	0.111	0.220	0.236	0.161	0.070	0.017	0.002		
	5		0.002	0.039	0.132	0.221	0.226	0.147	0.057	0.010		
	6			0.010	0.057	0.147	0.226	0.221	0.132	0.039	0.002	
	7			0.002	0.017	0.070	0.161	0.236	0.220	0.111	0.016	0.001
	8				0.004	0.023	0.081	0.177	0.257	0.221	0.071	0.014
	9				0.001	0.005	0.027	0.089	0.200	0.295	0.213	0.087
	10					0.001	0.005	0.027	0.093	0.236	0.384	0.329
	11							0.004	0.020	0.086	0.314	0.569
12	0	0.540	0.282	0.069	0.014	0.002						
	1	0.341	0.377	0.206	0.071	0.017	0.003					
	2	0.099	0.230	0.283	0.168	0.064	0.016	0.002				
	3	0.017	0.085	0.236	0.240	0.142	0.054	0.012	0.001			
	4	0.002	0.021	0.133	0.231	0.213	0.121	0.042	0.008	0.001		
	5		0.004	0.053	0.158	0.227	0.193	0.101	0.029	0.003		
	6			0.016	0.079	0.177	0.226	0.177	0.079	0.016		
	7			0.003	0.029	0.101	0.193	0.227	0.158	0.053	0.004	
	8			0.001	0.008	0.042	0.121	0.213	0.231	0.133	0.021	0.002
	9				0.001	0.012	0.054	0.142	0.240	0.236	0.085	0.017
	10					0.002	0.016	0.064	0.168	0.283	0.230	0.099
	11						0.003	0.017	0.071	0.206	0.377	0.341
12							0.002	0.014	0.069	0.282	0.540	
13	0	0.513	0.254	0.055	0.010	0.001						
	1	0.351	0.367	0.179	0.054	0.011	0.002					
	2	0.111	0.245	0.268	0.139	0.045	0.010	0.001				
	3	0.021	0.100	0.246	0.218	0.111	0.035	0.006	0.001			
	4	0.003	0.028	0.154	0.234	0.184	0.087	0.024	0.003			
	5		0.006	0.069	0.180	0.221	0.157	0.066	0.014	0.001		
	6		0.001	0.023	0.103	0.197	0.209	0.131	0.044	0.006		
	7			0.006	0.044	0.131	0.209	0.197	0.103	0.023	0.001	
	8			0.001	0.014	0.066	0.157	0.221	0.180	0.069	0.006	
	9				0.003	0.024	0.087	0.184	0.234	0.154	0.028	0.003
	10				0.001	0.006	0.035	0.111	0.218	0.246	0.100	0.02



<i>n</i>	<i>x</i>	<i>p</i>										
		0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
13	11					0.001	0.010	0.045	0.139	0.268	0.245	0.111
	12						0.002	0.011	0.054	0.179	0.367	0.351
	13							0.001	0.010	0.055	0.254	0.513
14	0	0.488	0.229	0.044	0.007	0.001						
	1	0.359	0.356	0.154	0.041	0.007	0.001					
	2	0.123	0.257	0.250	0.113	0.032	0.006	0.001				
	3	0.026	0.114	0.250	0.194	0.085	0.022	0.003				
	4	0.004	0.035	0.172	0.229	0.155	0.061	0.014	0.001			
	5		0.008	0.086	0.196	0.207	0.122	0.041	0.007			
	6		0.001	0.032	0.126	0.207	0.183	0.092	0.023	0.002		
	7			0.009	0.062	0.157	0.209	0.157	0.062	0.009		
	8			0.002	0.023	0.092	0.183	0.207	0.126	0.032	0.001	
	9				0.007	0.041	0.122	0.207	0.196	0.086	0.008	
	10				0.001	0.014	0.061	0.155	0.229	0.172	0.035	0.004
	11					0.003	0.022	0.085	0.194	0.250	0.114	0.026
	12					0.001	0.006	0.032	0.113	0.250	0.257	0.123
	13						0.001	0.007	0.041	0.154	0.356	0.359
14							0.001	0.007	0.044	0.229	0.488	
15	0	0.463	0.206	0.035	0.005							
	1	0.366	0.343	0.132	0.031	0.005						
	2	0.135	0.267	0.231	0.092	0.022	0.003					
	3	0.031	0.129	0.250	0.170	0.063	0.014	0.002				
	4	0.005	0.043	0.188	0.219	0.127	0.042	0.007	0.001			
	5	0.001	0.010	0.103	0.206	0.186	0.092	0.024	0.003			
	6		0.002	0.043	0.147	0.207	0.153	0.061	0.012	0.001		
	7			0.014	0.081	0.177	0.196	0.118	0.035	0.003		
	8			0.003	0.035	0.118	0.196	0.177	0.081	0.014		
	9			0.001	0.012	0.061	0.153	0.207	0.147	0.043	0.002	
	10				0.003	0.024	0.092	0.186	0.206	0.103	0.010	0.001
	11				0.001	0.007	0.042	0.127	0.219	0.188	0.043	0.005
	12					0.002	0.014	0.063	0.170	0.250	0.129	0.031
	13						0.003	0.022	0.092	0.231	0.267	0.135
	14							0.005	0.031	0.132	0.343	0.366
15								0.005	0.035	0.206	0.463	



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990



Grados de libertad	t 0.05	t 0.025	t 0.01	t 0.005
1	6.314	12.706	31.821	63.656
2	2.920	4.303	6.965	9.925
3	2.353	3.182	4.541	5.841
4	2.132	2.776	3.747	4.604
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.699	2.045	2.462	2.756



Tabla I **Coefficientes binomiales**

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

Si es necesario emplear la identidad $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

